Дифференциальная геометрия и элементы топологии в задачах, рисунках и комментариях

Учебное пособие

Составитель: **Н. В. Тимофеева**

Пособие предназначено для студентов специальностей "Математика", "Физика" и "Информатика" с дополнительной специальностью "Математика". Оно содержит задачи по разделам дифференциальной геометрии и элементам топологии, необходимые теоретические сведения, примерный план лекций, комментарии, мотивировки и примеры, а также большое количество рисунков. Пособие нацелено на структурирование знаний, получаемых студентами, повышение уровня понимания фактов и теорем математики (и не только геометрии) и межпредметных связей, развитие пространственных представлений. Кроме этого, оно содержит ответы на вопросы, часто задаваемые студентами.

Введение

- Настоящее пособие, подготовленное в поддержку лекционно-практического курса дифференциальной геометрии и элементов топологии, содержит задачи по разделам дифференциальной геометрии и элементам топологии, необходимые теоретические сведения, примерный план лекций, комментарии, мотивировки и примеры, а также аналогии из курса физики и параллели с курсом математического анализа и другими курсами геометрии. Пособие нацелено на структурирование знаний, получаемых студентами, повышение уровня понимания фактов и теорем математики (и не только геометрии) и межпредметных связей, развитие пространственных представлений и, возможно, пробуждение интереса к математике. Кроме этого, оно содержит ответы на вопросы, часто задаваемые студентами.
- Пособие состоит из двух глав, первая из которых содержит более современный материал и посвящена элементам топологии, вторая - классические темы дифференциальной геометрии: теорию кривых на плоскости и в пространстве и теорию поверхностей. Каждый раздел включает вопросы теории - примерный план лекционного курса; основные определения, результаты, комментарии - материалы, призванные помочь студенту в осмыслении основ изучаемой науки и необходимые для решения задач; рисунки, подкрепляющие геометрические факты и конструкции и, наконец, задачи различного уровня сложности.
- В силу специфики изучаемого предмета связи с математическим анализом и аналитической геометрией остаются очень тесными на протяжении всего курса. Задачи не только "тренируют" умение доказывать определенные факты и вычислять характеристики геометрических объектов, но и знакомят с новыми для студента объектами и конструкциями топологии и дифференциальной геометрии. Некоторые из них предлагается построить самостоятельно, используя описание, данное в тексте задачи.
- Величины и конструкции дифференциальной геометрии и топологии часто имеют наглядную интерпретацию (например, гауссова кривизна поверхности в ее точке пропорциональна дефекту малого геодезического треугольника в окрестности этой точки), реализуются в физических процессах (поверхности, описывающие форму мыльных пленок, имеют нулевую среднюю кривизну - это требование минимальности потенциальной энергии) и в практической деятельности человека (задачи картографии и архитектуры).
- Многие (хотя далеко не все) объекты дифференциальной геометрии и топологии нетрудно себе представить или нарисовать; они своеобразно красивы. Математика выступает еще и средством достижения художественной гармонии, а также может быть стимулом к научному и эстетическому творчеству.

Глава 1. Элементы топологии

Подраздел

- ## Вопросы теории
- Топологическое пространство. Возможность введения различных топологических структур на одном и том же множестве. База топологии. Аксиомы отделимости. Хаусдорфово топологическое пространство. Метрическое пространство как

топологическое пространство. Классическая и концентрическая топологии на прямой и плоскости. Непрерывное отображение топологических пространств. Свойства непрерывных отображений. Топология - структура, задающая близость точек: роль топологии в математическом анализе. Гомеоморфизм. Гомеоморфность топологических пространств как отношение эквивалентности. Понятие топологического многообразия. Топологические многообразия с краем. Размерность топологического многообразия. Топологические подмногообразия размерностей 1 и 2 в вещественном евклидовом пространстве. Ориентируемые и неориентируемые поверхности. Топологическая классификация поверхностей. Понятие триангуляции топологического многообразия. Характеристика Эйлера и ее топологическая инвариантность. Понятие дифференцируемого многообразия. Координатные функции и функции перехода. Примеры дифференцируемых многообразий. Топологические эффекты в физике (вихревые потоки в атмосфере, возможная анизотропия реликтового излучения).

- ## Основные определения, результаты, комментарии

- *Топологическим пространством* (X,τ) называется множество X, в котором зафиксирован класс τ подмножеств, называемых *открытыми*, удовлетворяющий следующей системе аксиом (аксиомы топологии для открытых подмножеств):
  1^0. $X\in\tau$;
  2^0. $\emptyset\in\tau$;
  3^0. Для любого набора $\{U_\imath\}_{\imath\in I}$, $U_\imath\in\tau$, выполнено $\bigcup_{\imath\in I}U_\imath\in\tau.$
  4^0. Для любого *конечного* набора $\{U_i\}_{i=1}^n$, $U_i\in\tau$, выполнено $\bigcap_{i=1}^n U_i\in\tau.$
  Элементы множества X называются *точками*, класс τ - *топологией* на множестве X.
- Требование конечности в 4^0 является существенным. В самом деле, рассмотрим числовую прямую, класс открытых множеств которой определен привычным из курса математического анализа способом. Такая топология на числовой прямой называется *классической*. Система вложенных интервалов $(-1/i,1/i)_{i=1}^\infty$ обладает единственной общей точкой $\{0\}$. Одноточечное множество на числовой прямой не является открытым в классической топологии.
- На одном и том же множестве могут быть введены различные топологии. Например, считая открытыми на числовой прямой только множества видов $\emptyset$, $(-a,a)$ и $(-\infty,\infty)$, получим *концентрическую топологию*. Объявляя открытыми любые объединения одноточечных подмножеств любого множества X, а также пустое подмножество и само X, получим *дискретную топологию*, превращающую множество X в *пространство изолированных точек*.
- *Метрическим пространством* называется множество X, снабженное функцией $d:X\times X\to\mathbb{R}$, удовлетворяющей следующим аксиомам (аксиомы расстояния):
  1^0. *Знакоопределенность*: $d(p,q)\geq 0$ для любых точек $p\in X$ и $q\in X$.
  2^0. *Невырожденность*: $d(p,q)=0$ тогда и только тогда, когда $p=q.$

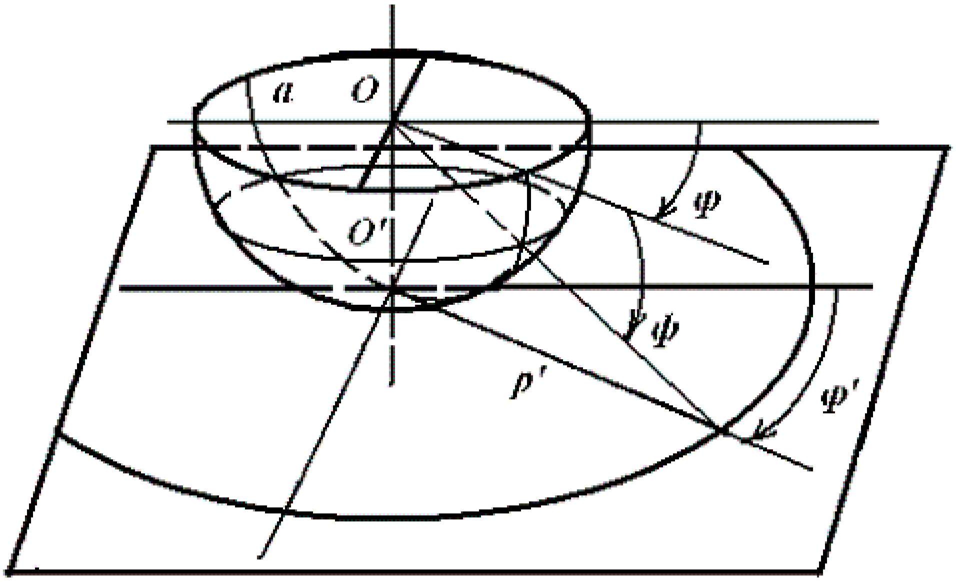
3^0. *Симметричность*: $d(p,q) = d(q,p)$ для любых точек $p \in X$ и $q \in X$.

4^0. *Неравенство треугольника*: $d(p,q) + d(q,r) \geq d(r,p)$ для любых точек $p \in X$, $q \in X$ и $r \in X$.

Функция d называется *функцией расстояния,* или *метрикой.*

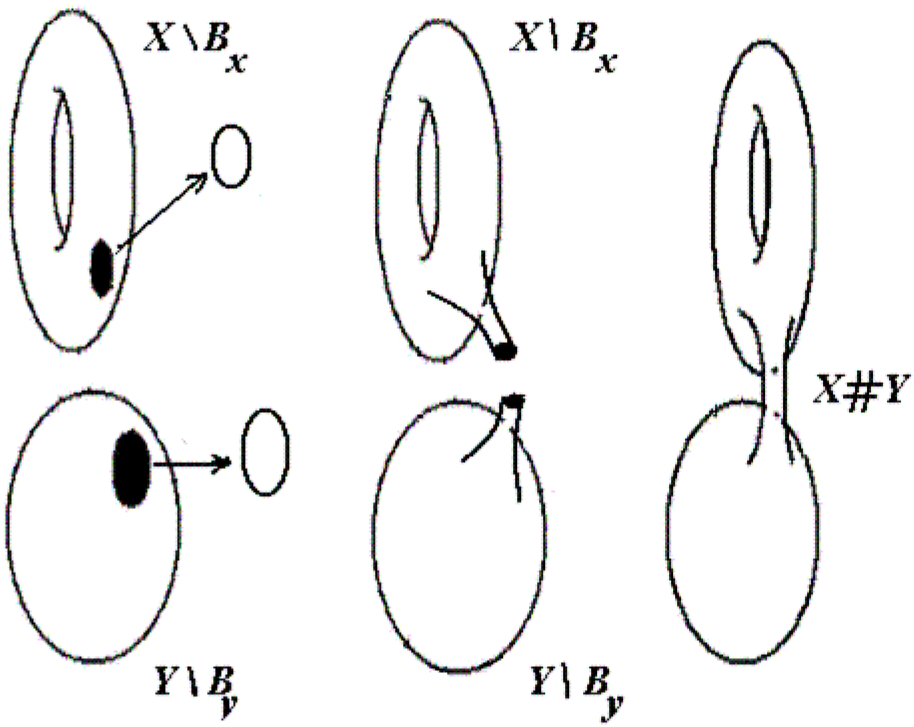
- Метрическое пространство является топологическим. Индуцированная метрикой d топология на множестве X определяется следующим образом: объявим открытыми подмножества $\emptyset$, X и всевозможные объединения подмножеств вида $B_a(p) := \{q \in X | d(p,q) < a\}$ для всех положительных чисел a и точек $p \in X$. Выполнение аксиом 1^0- 4^0 топологического пространства нетрудно проверить самостоятельно.
- Далеко не всякое топологическое пространство допускает метрику, такую, чтобы топология была индуцирована этой метрикой.
- Пусть $p \in (X, \tau)$ - точка топологического пространства (X, τ). *Окрестностью* точки p называется любое открытое в X подмножество, содержащее точку p.
- Топологическое пространство (X, τ) называется *хаусдорфовым*, если для любых двух его различных точек p и q найдутся непересекающиеся открытые окрестности, то есть множества $U_p \in \tau$ и $U_q \in \tau$, такие, что $U_p \cap U_q = \emptyset$.
- Хаусдорфовыми являются, например, числовая прямая с классической топологией, любое метрическое пространство с топологией, индуцированной метрикой, а также любое пространство изолированных точек. Числовая прямая с концентрической топологией нехаусдорфова.
- *Базой топологии пространства* (X, τ) называется подкласс $\tau_B \subset \tau,$ такой, что для всякого открытого подмножества $U \in \tau$ и для всякой точки $p \in U$ найдется такое подмножество $V \in \tau_B$, что $p \in V \subset U$.
- Если пространство (X, τ) таково, что подкласс τ_B может состоять из счетного набора подмножеств, то говорят, что (X, τ) - *пространство со счетной базой.*
- Пример топологического пространства со счетной базой легко построить. Таковым является числовая прямая с классической топологией. База топологии представлена интервалами с концами в рациональных точках. Множество таких интервалов, как нетрудно видеть, счетно. Читателю предлагается построить счетную базу классической топологии на плоскости.
- *Непрерывным* называется отображение $f : (X, \tau) \to (Y, \sigma)$ топологических пространств, при котором выполнено следующее свойство: прообраз $f^{-1}(U)$ каждого открытого в пространстве Y подмножества $U \in \sigma$ открыт в пространстве X.

- Отображение $f:(X,\tau)\to(Y,\sigma)$ топологических пространств называется *гомеоморфизмом*, если оно
  1) непрерывно,
  2) взаимно однозначно,
  3) обладает непрерывным двусторонним обратным отображением f^{-1}.
- Нетрудно заметить, что для любого пространства (X,τ) *постоянное отображение* $c:X\to\{\bullet\}$, где $\{\bullet\}$- одноточечное пространство, непрерывно. При этом для любого неодноточечного пространства (X,τ) отображение c не является гомеоморфизмом (оно не взаимно однозначно и тем более не обратимо).
- Отношение гомеоморфности в классе топологических пространств рефлексивно, симметрично и транзитивно, то есть является отношением эквивалентности (докажите!)
- Отображение $f:X\to Y$ топологических пространств называется *локальным гомеоморфизмом,* если у каждой точки p пространства X имеется такая окрестность U_p, что ограничение $f|U_p:U_p\to Y$ отображения f осуществляет гомеоморфизм окрестности U_p на ее образ $f(U_p)\subset Y$. При этом пространства X и Y называются *локально гомеоморфными.*
- *(Вещественным) топологическим многообразием (без края)* называется хаусдорфово топологическое пространство (X,τ) со счетной базой, каждая точка которого обладает окрестностью, гомеоморфной евклидову пространству $\mathbb{R}^n$. Число n называется *размерностью* топологического многообразия X.
- Простейшими примерами топологических многообразий являются числовая прямая с классической топологией и евклидова плоскость. Более содержательный пример - двумерная сфера S^2. В качестве окрестности любой ее точки выберем содержащую эту точку открытую полусферу (рис. 1). Гомеоморфизм открытой полусферы на касательную плоскость, параллельную плоскости линии границы, определим с помощью стереографической проекции. Выбрав сферические координаты на полусфере радиуса a и полярные координаты на плоскости так, как показано на рис. 1 , получим: $\varphi'=\varphi,$ $\rho'=a\operatorname{ctg}\psi$. Полученное отображение непрерывно и взаимно однозначно. Обратное к нему отображение задается формулами $\varphi=\varphi'$, $\psi=\operatorname{arcctg}(\rho'/a)$. Оно непрерывно, так как непрерывны задающие его функции.



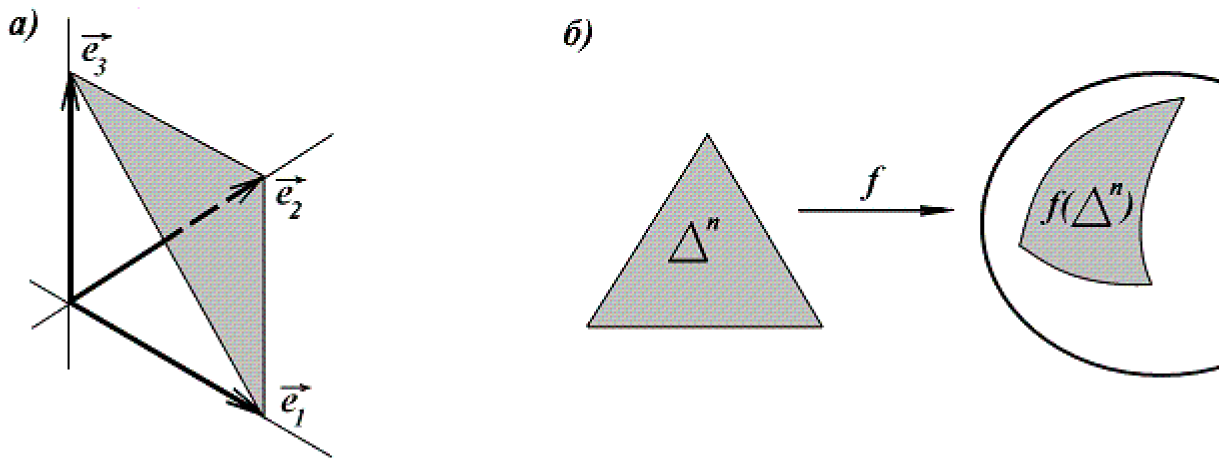
-
  - Рис. 1. Сфера как топологическое многообразие
- *(Вещественным) топологическим многообразием с краем* называется хаусдорфово топологическое пространство (X, τ) со счетной базой, каждая точка которого принадлежит одному из двух следующих классов:
  1) класс точек, каждая из которых обладает окрестностью, гомеоморфной евклидову пространству $\mathbb{R}^n$;
  2) класс точек, каждая из которых обладает окрестностью, гомеоморфной полупространству $\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, x_2, \dots x_n) \in \mathbb{R}^n | x_1 \geq 0\}$ евклидова пространства $\mathbb{R}^n$.
  Точки первого класса называются *внутренними точками* многообразия X, точки второго класса - *точками границы* или *точками края*. Число n называется *размерностью* топологического многообразия X.
- Примерами одномерных многообразий с краем служат отрезок и полупрямая, примерами двумерных - круг и лента Мебиуса. Границы двух последних многообразий гомеоморфны окружности, в то время как сами многообразия негомеоморфны.
- Для конструирования топологических многообразий часто используется операция *приклеивания*, заключающаяся в следующем. Пусть X и Y - топологические многообразия, $Z_X \subset X$, $Z_Y \subset Y$ - подмножества, причем Z_X гомеоморфно Z_Y. Пусть $f : Z_X \to Z_Y$ - гомеоморфизм. Отождествляя каждую точку $x \in Z_X$ с ее образом $f(x) \in Z_Y$, получим новое многообразие $X \coprod_f Y$, называемое *склейкой многообразий* X *и* Y *вдоль гомеоморфизма* f.
- Для построения *связной суммы многообразий* X *и* Y одинаковой размерности n выберем окрестности B_x и B_y точек $x \in X$ и $y \in Y$ соответственно, гомеоморфные открытому n-мерному шару. Очевидно, границы многообразий $X \backslash B_x$ и $Y \backslash B_y$ гомеоморфны ($n-1$-мерной сфере). Пусть f - какой-нибудь

гомеоморфизм границ. Тогда связная сумма $X \sharp Y$ многообразий X и Y определяется как их склейка вдоль гомеоморфизма f (рис. 2).



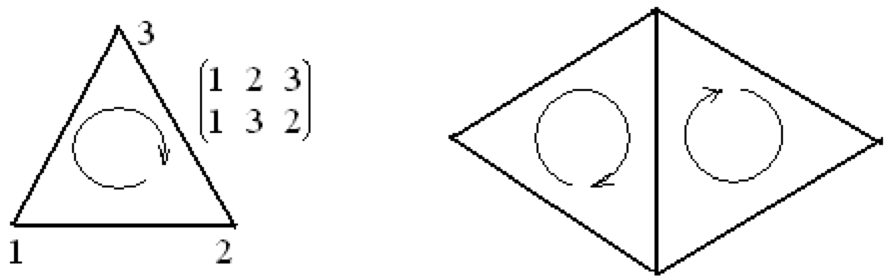
- Рис. 2. Связная сумма топологических многообразий

- *Евклидовым* n*-мерным симплексом* называется множество $\Delta^n = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} | x_0 + x_1 + \dots + x_n = 1,\ x_i \geq 0,\ i = 0, \dots, n\}$.
- l*-Мерной гранью евклидова симплекса* Δ^n называется евклидов симплекс $\Delta^l_{i_1, \dots, i_{n-l}} = \{(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \Delta^n | x_{i_1} = \dots = x_{i_{n-l}} = 0,\ \{i_1, \dots, i_{n-l}\} \subset \{0, \dots, n\}\}$



- Рис. 3. а) Евклидов симплекс б) Топологический симплекс

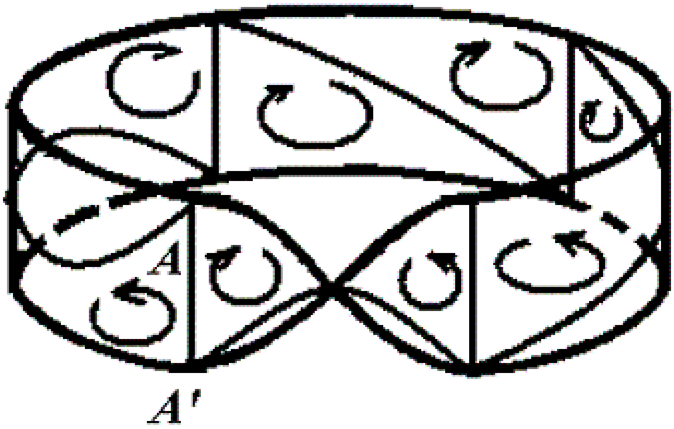
- *Топологическим n-мерным симплексом в многообразии X* называется образ евклидова n-мерного симплекса при таком его отображении $f:\Delta^n \to X$ в многообразие X, что индуцированное им отображение $f:\Delta^n \to f(\Delta^n)$ - гомеоморфизм.
- В дальнейшем мы не будем делать различия в обозначениях между топологическим симплексом и соответствующим ему евклидовым симплексом.
- Различные топологические симплексы Δ^{n_1} и Δ^{n_2} назовем *примыкающими правильно*, если выполнено одно из условий:
  1) симплексы не пересекаются;
  2) симплексы имеют общую грань, являющуюся их пересечением;
  3) один из симплексов является гранью другого.
- *Триангуляцией* топологического многообразия X называется представление его в виде объединения некоторого набора симплексов, причем различные симплексы примыкают правильно, и грань любого симплекса не может быть инцидентна грани того же симплекса.
- Занумеруем вершины n-мерного симплекса Δ по правилу: вершина с номером k имеет координаты $(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)$ (координата с номером k равна 1) и зафиксируем *направление обхода*, то есть порядок перечисления его вершин, задаваемый подстановкой $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & n \\ i_0 & i_1 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$ (рис. 4). Два направления обхода $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & n \\ i_0 & i_1 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \ldots & n \\ j_0 & j_1 & \ldots & j_n \end{pmatrix}$ одного симплекса Δ называются равными, если задающие их подстановки имеют одинаковую четность, и противоположными, если задающие их подстановки имеют различную четность.



-
- Рис. 4. Ориентированные симплексы
- *Ориентацией* симплекса Δ называется класс равных направлений его обхода. Симплексы одинаковых размерностей Δ_1 и Δ_2 с общей гранью $\Delta_1 \cap \Delta_2$

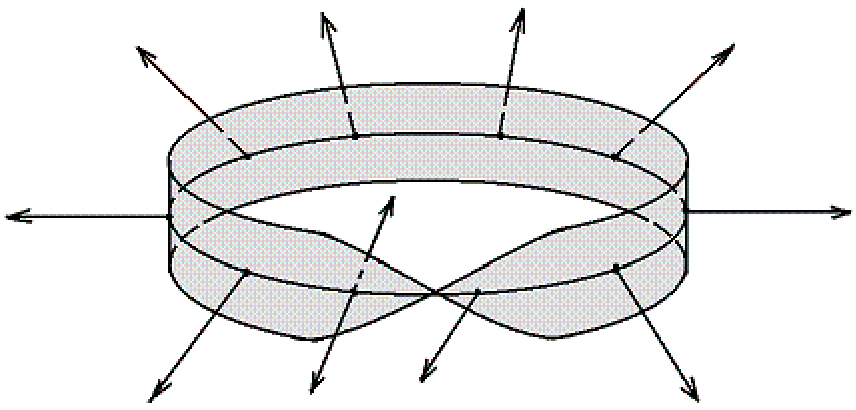
согласованно ориентированы, если их ориентации на общей грани противоположны (рис. 4).

- Топологическое многообразие называется *ориентируемым*, если оно допускает триангуляцию, симплексы которой можно ориентировать согласованно, и *неориентируемым* в противном случае.
- Можно показать, что ориентируемость (неориентируемость) многообразия не зависит от выбора его триангуляции.
- Ориентируемыми многообразиями являются, например, евклидова плоскость, сфера и тор, неориентируемыми - лист Мебиуса, вещественная проективная плоскость и бутылка Клейна (см. задачи).
- Покажем, что лента Мебиуса является неориентируемым многообразием. Для этого выберем ее триангуляцию и ориентируем последовательно каждый ее симплекс так, чтобы он был ориентирован соответственно предыдущему (рис. 5). Тогда найдется ребро AA', на котором индуцированы одинаковые ориентации.

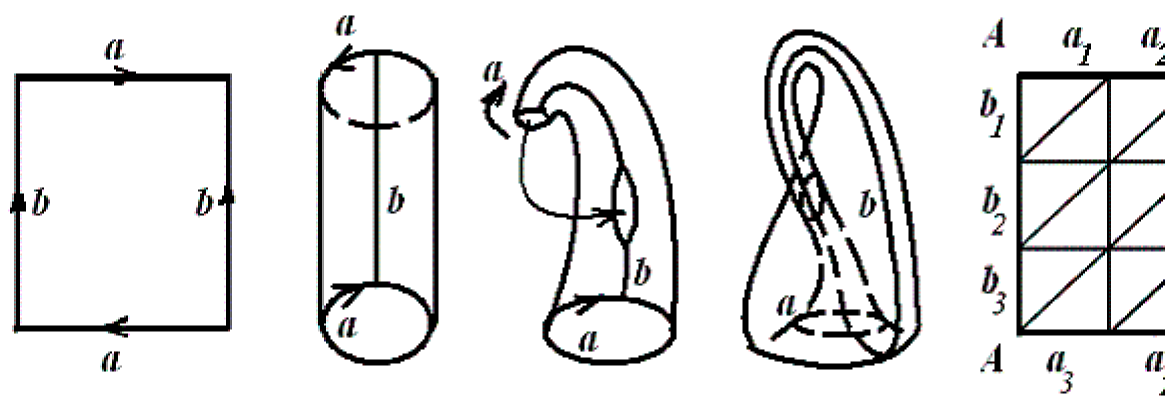


- Рис. 5. Лист Мебиуса как неориентируемое многообразие

- Ориентации двумерного симплекса на поверхности может быть поставлено в соответствие одно из двух возможных направлений нормали во внутренней точке симплекса. Это может быть сделано по известному из курсов аналитической геометрии и физики правилу буравчика. Направление нормали в точке поверхности указывает одну из двух сторон поверхности в окрестности этой точки. Если поверхность ориентируема, то задание ориентации фиксирует семейство направлений нормалей поверхности, причем направление нормали в точке не меняется при обходе любого замкнутого контура на поверхности, содержащего эту точку. Таким образом, гипотетический наблюдатель, совершающий путешествие по ориентируемой поверхности, всегда остается с одной ее стороны и не может попасть на другую. В этом смысле ориентируемые поверхности называют *двусторонними*. В случае неориентируемой поверхности ситуация обратная (рис. 6).



-
- Рис. 6. Лист Мебиуса как односторонняя поверхность
- Существует замкнутый контур, при обходе которого направление нормали меняется на противоположное. При путешествии по такому контуру гипотетический наблюдатель, обойдя маршрут один раз, вернется в исходную точку, но окажется с другой стороны поверхности. Поэтому неориентируемые поверхности называют *односторонними*.
- Ограничимся рассмотрением многообразий, допускающих триангуляцию из конечного числа симплексов.
- *Топологической эйлеровой характеристикой*, или *характеристикой Эйлера - Пуанкаре*, данной триангуляции многообразия X называется число
- $$\chi(X) = \sum_{i=0}^{n} (-1)^n q_i,$$
- где q_i - число симплексов размерности i в данной триангуляции.
- В подробных курсах топологии доказывается, что значение эйлеровой характеристики зависит от многообразия X, но не от выбора его триангуляции. Также можно показать, что *эйлеровы характеристики гомеоморфных многообразий равны*. Последнее свойство означает неизменность эйлеровой характеристики при гомеоморфизмах и называется *топологической инвариантностью эйлеровой характеристики*.



-
- Рис. 7. Бутылка Клейна и ее триангуляция
- Вычислим эйлерову характеристику бутылки Клейна (рис. 7). Бутылка Клейна может быть получена склейкой одной пары противоположных сторон

прямоугольника обычным образом, а другой пары сторон - с обращением направления обхода, как показано на рисунке. Одна из возможных триангуляций бутылки Клейна показана на рис. 7. Заметим, что на схеме склейки одна и та же точка может иметь несколько изображений. Например, вершина A имеет четыре изображения, а остальные точки сторон прямоугольника - по два изображения. Также, некоторые грани триангуляции имеют по два изображения, отождествляемые склейкой. Таковы грани a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3. Остальные грани имеют по одному изображению. Подсчитаем число граней, ребер и вершин триангуляции: $q_2 = 18,$ $q_1 = 27,$ $q_0 = 9.$ Таким образом, эйлерова характеристика бутылки Клейна равна $\chi(K^2) = 0.$

- Топологическое многообразие X называется *дифференцируемым класса* C^k (или C^∞), если гомеоморфизмы $f_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ подчинены следующему условию:
  для любых i, j ограничения отображений f_i и f_j *согласованы* в следующем смысле: определено отображение $\varphi_{ij} := f_j \circ f_i^{-1} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, задаваемое функциями, имеющими непрерывные частные производные порядка k (соответственно, имеющими непрерывные частные производные любого порядка), такое, что $f_j|(U_i \cap U_j) = \varphi_{ij} \circ (f_i|(U_i \cap U_j))$.
  Отображения f_i называются *координатными отображениями*, пара (U_i, f_i) - *картой*, а соответствующий покрытию $\{U_i\}_{i \in I}$ набор $\{(U_i, f_i)\}$ - *атласом* дифференцируемого многообразия X. Отображения φ_{ij} иногда называют *отображениями склейки*.
- Нетрудно убедиться в том, что отображения склейки обладают следующими свойствами:
  1) для любых i, j, k справедливо *свойство композиции*: $\varphi_{jk} \circ \varphi_{ij} = \varphi_{ik}$;
  2) для любых i, j, k справедливо *свойство коцикла*: $\varphi_{ki} \circ \varphi_{jk} \circ \varphi_{ij} = id_{\mathbf{R}^n}$, где символом $id_{\mathbf{R}^n}$ обозначено тождественное отображение евклидова пространства.
- Многообразия класса C^∞ называют также *аналитическими*.
- Очевидно, что построенная нами структура вещественного многообразия на двумерной сфере является, согласно только что данному определению, структурой аналитического многообразия.
- **Задачи**
- 1. Убедитесь в том, что, наряду с аксиомами топологии для открытых множеств, топологическая структура на множестве X может быть задана следующей системой аксиом (аксиомы топологии для замкнутых множеств):
  $1^0.$ $\emptyset$ замкнуто;
  $2^0.$ X замкнуто;
  $3^0.$ Если $\{A_i\}_{i \in I}$ - произвольный набор замкнутых множеств, то множество

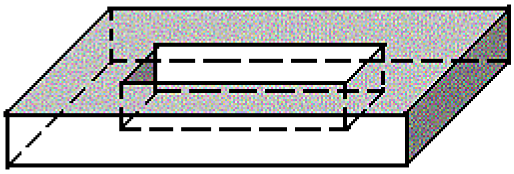
$\bigcap_{i\in I} A_i$ замкнуто.

4^0.Если $\{A_i\}_{i=1}^n$ - конечный набор замкнутых множеств, то множество $\bigcup_{i=1}^{i=n} A_i$ замкнуто.

Указание. Определите открытое подмножество как дополнение к замкнутому, а затем - замкнутое подмножество как дополнение к открытому.

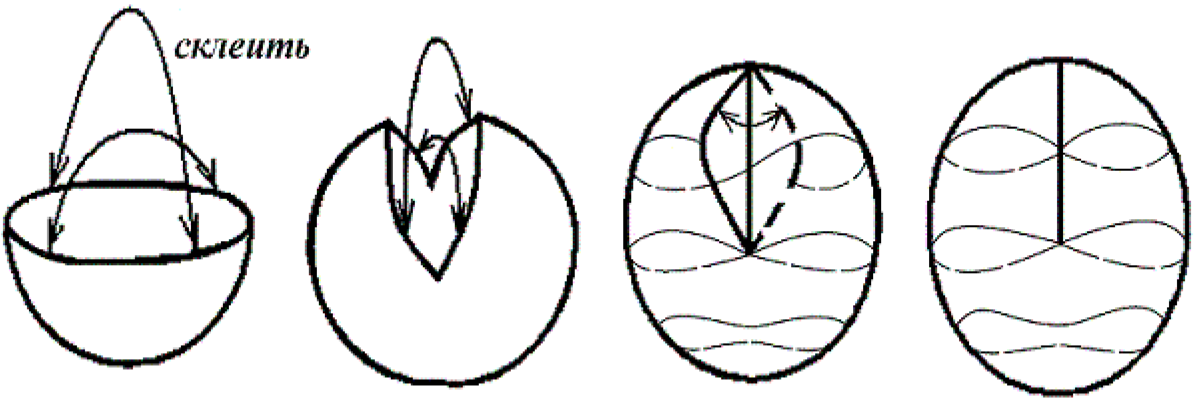
- Приведите пример, показывающий, что требование конечности в 4^0существенно. *Указание.* Постройте покрытие открытого интервала числовой прямой (например, интервала $(-1,1)$) отрезками.
- 2. Докажите, что следующие топологические пространства гомеоморфны (там, где это возможно, задайте отображение уравнениями и докажите, что это отображение - гомеоморфизм. В других случаях воспользуйтесь геометрическим построением и теоретико-множественным определением):
  1) окружность S^1и треугольник Δ^1;
  2) круг и плоский треугольник;
  3) сфера S^2и поверхность тетраэдра Δ^2;
  4) поверхность куба и поверхность тетраэдра;
  5) открытый интервал (0; 1) и открытый интервал (0; 10);
  6) два произвольных открытых интервала;
  7) открытый интервал и прямая;
  8) открытый круг и плоскость;
  9) открытое кольцо и плоскость без точки (проколотая плоскость).
- 3. Докажите, что данные преобразования евклидова пространства являются гомеоморфизмами:
  1) параллельный перенос на вектор $\vec{p}$;
  2) сжатие в направлении вектора $\vec{p}$с коэффициентом λ;
  3) поворот относительно начала координат на угол φ;
  4) линейное преобразование, заданное невырожденной матрицей A.
- 4. Докажите, что открытый d-мерный шар гомеоморфен d-мерному евклидову пространству. Укажите функциональное представление отображения, осуществляющего гомеоморфизм. Сформулируйте новое определение топологического многообразия с использованием открытых шаров, и проверьте его эквивалентность известному Вам определению. Можно ли его переформулировать в терминах локального гомеоморфизма?
- 5. Докажите, что данные подпространства евклидова пространства можно снабдить структурой топологического многообразия:
  1) параболоид вращения $x^2+y^2=2pz$;
  2) эллипсоид $x^2/a^2+y^2/b^2+z^2/c^2=1$;
  3) проективная плоскость как пространство классов векторов трехмерного векторного пространства по отношению коллинеарности.
- 6. Укажите какую-нибудь триангуляцию данного топологического многообразия. Вычислите эйлерову характеристику, используя эту триангуляцию:
  1) поверхность треугольной пирамиды;
  2) поверхность четырехугольной пирамиды;

3) поверхность треугольной призмы;
4) треугольная призма;
5) поверхность куба;
6) поверхность икосаэдра;
7) поверхность фигуры, изображенной на рис. 8 а) ("кольцо" квадратного сечения).



- Рис. 8. а) "Кольцо" квадратного сечения б) Тор

- 7. Постройте две различные триангуляции данного топологического многообразия и вычислите эйлерову характеристику, используя каждую из них. Сравните результаты:
  1) сфера;
  2) шар;
  3) тор (рис. 8 б));
  4) полнотория (область пространства, ограниченная тором);
  5) лента Мебиуса.



- Рис. 9. Вещественная проективная плоскость

- 8. Вычислите эйлеровы характеристики следующих топологических многообразий:
  1) вещественная проективная плоскость (рис. 9);
  2) связная сумма тора и сферы;
  3) тор рода 2 (связная сумма двух торов);
  4) связная сумма тора и бутылки Клейна.
- 9. Используя эйлерову характеристику, докажите, что данные топологические многообразия не гомеоморфны:
  1) сфера и проективная плоскость;
  2) открытый диск и лента Мебиуса;
  3) бутылка Клейна и тор рода 3.
- 10. Выясните, ориентируемы ли данные многообразия:
  1) двумерная сфера;
  2) круговой цилиндр;
  3) тор;
  4) тор рода 2;
  5) бутылка Клейна;
  6) вещественная проективная плоскость;

7) связная сумма тора и вещественной проективной плоскости. Ответ обоснуйте, используя триангуляции многообразий.

- 11. Докажите, что данные подмножества евклидова пространства можно снабдить структурой дифференцируемого многообразия. Сделайте это и укажите порядок гладкости построенной Вами структуры:
  1) плоскость $z = ax + by$;
  2) гиперболический параболоид $2z = x^2/a^2 - y^2/b^2$;
  3) сфера (постройте какую-нибудь структуру дифференцируемого многообразия, отличную от приведенной в примере);
  4) тор.

Глава 2. Дифференциальная геометрия

Обозначения и соглашения

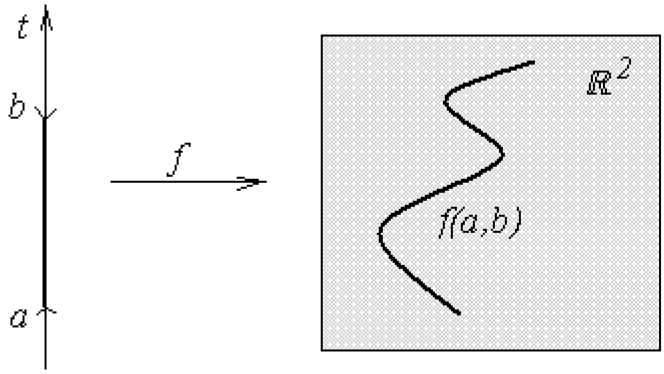
Во всем тексте этой главы используются следующие обозначения:
s- естественный параметр кривой;
t- параметр кривой при произвольной параметризации;
$dist$- расстояние между геометрическими объектами, определяемое как точная нижняя грань расстояний между точками этих объектов.

Дифференцирование по параметру, независимо от вида параметра, обозначается штрихом, например, $x'(t)$. Частное дифференцирование обозначается указанием в нижнем индексе переменной, по которой произведено дифференцирование, например, $x_u(u, v)$.

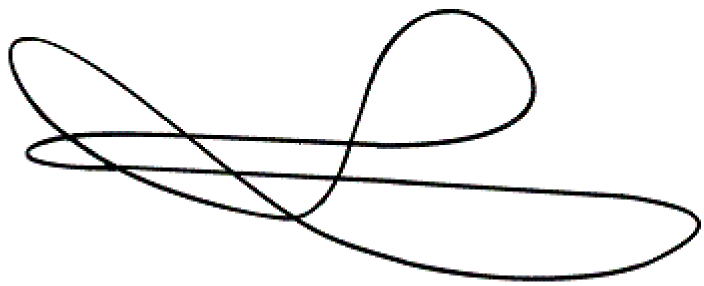
Подраздел

- # §1. Плоские кривые
- **Вопросы теории**
- Кривые на плоскости. Способы задания кривых: явной функциональной зависимостью, неявной функциональной зависимостью, векторно-параметрическим представлением, координатно-параметрическим представлением. Регулярное задание кривой и его кинематическая интерпретация. Асимптотическое поведение кривой. Формула длины кривой и ее кинематическая интерпретация. Кривизна кривой на плоскости и ее кинематическая интерпретация.
- **Основные определения, результаты, комментарии**

- *Элементарной кривой на плоскости* называется образ открытого интервала $(a,b) \subset \mathbb{R}$ при его гомеоморфизме $f:(a,b) \to \mathbb{R}^2$ в евклидову плоскость (рис. 10).



- Рис. 10. Элементарная кривая
- *Общей кривой на плоскости* называется подмножество евклидовой плоскости, локально гомеоморфное прямой (рис. 11).



- Рис. 11. Общая кривая
- Очевидно, всякая общая кривая допускает покрытие элементарными кривыми.
- Говорят, что кривая γ задана *явной функциональной зависимостью* $y = f(x)$, если каждая точка кривой γ принадлежит графику функции $y = f(x)$.
- Кривая γ задана *неявной функциональной зависимостью* $F(x,y) = 0,$ если координаты каждой точки кривой γ удовлетворяют уравнению $F(x,y) = 0.$
- Для вычислений в дифференциальной геометрии наиболее удобны *векторно-параметрическое представление*

$$\vec{r}(t) = (x(t), y(t)), \;\; t \in (a,b)$$

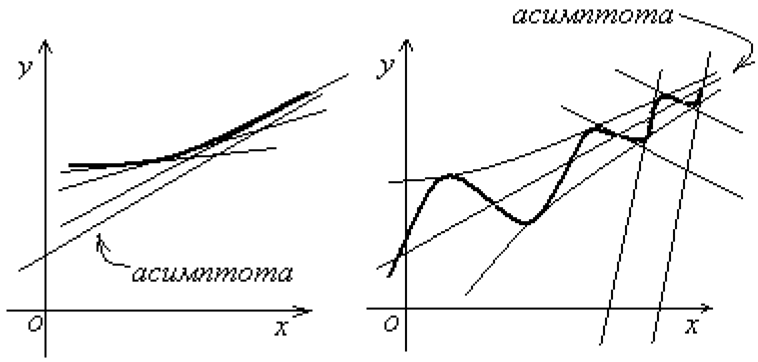
- и *координатно-параметрическое представление*

$$x = x(t), \; y = y(t), \; t \in (a,b),$$

- отличающиеся лишь формой записи.
- Параметрическое представление кривой называется *регулярным*, если индуцированное им отображение $f:(a,b) \to \mathbb{R}^2$ является локальным гомеоморфизмом на свой образ. Для этого необходимо и достаточно, чтобы

$|\vec{r}'(t)| > 0$ для всех $t \in (a, b).$ Назовем параметризацию C^k-*регулярной*, если вектор-функция $\vec{r}(t)$ обладает непрерывной производной порядка k.

- Говорят, что заданная параметрическим способом кривая $\vec{r} = \vec{r}(t)$ *уходит в бесконечность при* $t \to a,$ если имеет место предельное соотношение
- $$\lim_{t \to a}(x^2(t) + y^2(t)) = \infty.$$
- При этом символ a может иметь одно из следующих значений:
- $$1)\ a = t_0 + 0,\ \ 2)\ a = t_0 - 0,\ \ 3)\ a = t_0,\ \ 4)\ a = +\infty,\ \ 5)\ a = -\infty,\ \ 6)\ a = \infty.$$
- Случаи 1) и 2) означают стремление параметра к значению t_0 справа и слева соответственно; случай 3) применяется, если односторонние пределы при стремлении параметра к значению t_0 слева и справа равны. Случай 6) применяется, если пределы при стремлении параметра t к бесконечности обоих знаков равны.
- *Асимптотой* кривой $\vec{r} = \vec{r}(t)$ при $t \to a$ называется прямая g, удовлетворяющая условию:
- $$\lim_{t \to a} dist(P(t), g) = 0,$$
- где $P(t)$ - точка кривой, соответствующая значению t параметра.
- Для вычисления уравнений асимптот пользуются следующим правилом. Если кривая, заданная параметрическим способом, уходит в бесконечность при $t \to a$, то асимптота, если она существует, задается уравнением $y = kx + b$ (соответственно, $x = ky + b$), где
- $$k = \lim_{t \to a} \frac{y(t)}{x(t)}\ \Big(\text{соответственно,}\ \ k = \lim_{t \to a} \frac{x(t)}{y(t)}\Big),$$
- $$b = \lim_{t \to a}(y(t) - kx(t))\ (\text{соответственно,}\ \ b = \lim_{t \to a}(x(t) - ky(t))).$$
- На первый взгляд, можно было бы определить асимптоту как предельное положение касательной в точке данной кривой при удалении этой точки на бесконечность. В ряде случаев это определение приводит к тем же результатам, что и классическое. Вместе с тем можно построить кривые, имеющие касательную в каждой своей точке и имеющие асимптоту в данном направлении, но не имеющие предельного положения касательной в данном направлении (рис. 12).



- Рис. 12. Асимптоты и касательные
- В случае задания кривой неявным алгебраическим уравнением $F(x,y)=0$ также существует способ отыскания асимптот, заключающийся в следующем. Пусть $(\bar{x},\bar{y})$ - координаты точки, принадлежащей асимптоте, и $x=\bar{x}+\lambda u,$ $y=\bar{y}+\mu u$ - параметрические уравнения асимптоты, в которых u - параметр, (λ,μ) - координаты направляющего вектора, подлежащие определению.
- Обозначим за $Q(u)$ точку кривой, ближайшую к точке асимптоты, соответствующей значению параметра u. Тогда координаты точки $Q(u)$ равны

$$x(u)=\bar{x}+\lambda u+\xi(u),\quad y(u)=\bar{y}+\mu u+\eta(u),$$

- где $\xi(u)$ и $\eta(u)$ бесконечно малы при $u\to\infty$.
- Пусть F_k - совокупность членов степени k, входящих в многочлен $F(x,y)$. Тогда он может быть представлен в виде суммы однородных компонент различных степеней:

$$F=F_n+F_{n-1}+\cdots+F_0.$$

- Здесь n - степень многочлена F. Подстановка координат точки $Q(u)$ в многочлен $F(x,y)$ и выделение компонент старших по u степеней приводит к выражению

$$u^nF_n(\lambda,\mu)+u^{n-1}(\bar{x}(F_n(\lambda,\mu))_\lambda+\bar{y}(F_n(\lambda,\mu))_\mu+F_{n-1}(\lambda,\mu))+\ldots.$$

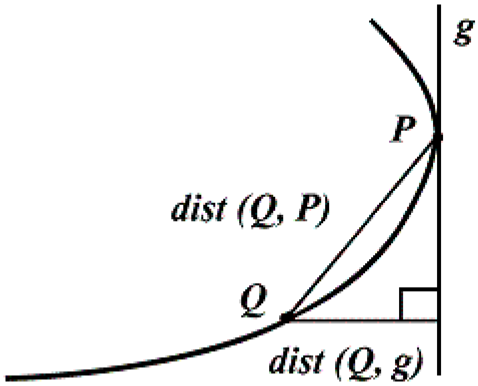
- Так как точка $Q(u)$ принадлежит кривой, то $F(x(u),y(u))=0$ и, следовательно,

$$\lim_{u\to\infty}\frac{1}{u^n}F(x(u),y(u))=0.$$

- Таким образом,

$$F_n(\lambda,\mu)=0.$$

- Это уравнение позволяет вычислить направление вектора (λ,μ). Аналогично,
  - $\bar{x}(F_n(\lambda,\mu))_\lambda+\bar{y}(F_n(\lambda,\mu))_\mu+F_{n-1}(\lambda,\mu)=0.(1)$
- Так как $(\bar{x},\bar{y})$ - координаты произвольной точки асимптоты, то (1) - уравнение асимптоты.
- Вычислим асимптоты кубической кривой $x^3+y^3-3axy=0.$ Подстановка параметрических уравнений асимптоты $x=\bar{x}+\lambda u,$ $y=\bar{y}+\mu u$ и выделение компонент старших степеней приводят к уравнениям:
  - $\lambda^3+\mu^3=0,(2)$
  - $3\lambda^2\bar{x}+3\mu^2\bar{y}-3a\lambda\,\mu=0.(3)$
- Из уравнения (2) получаем $\lambda=-\mu$. Полагая в (3) $\lambda=-\mu=1,$ получим уравнение асимптоты $\bar{x}+\bar{y}+a=0.$
- Если параметрическое задание кривой интерпретировать как кинематическое описание движения материальной точки с течением времени t, то регулярность этого задания требует, чтобы вектор мгновенной скорости $(x'(t),y'(t))$ не обращался в нуль ни при каком значении t.
- В этом случае длина кривой - это путь, пройденный материальной точкой за промежуток времени $t\in[a,b]:$
  - $$s_{[a,b]}=\int_a^b|\vec{r}\,'(t)|dt.$$
- В случае явного функционального задания $y=f(x)$ кривой нетрудно перейти к параметрическому заданию $x=t,$ $y=f(t)$ и получить формулу
  - $$s_{[a,b]}=\int_a^b\sqrt{1+f'^{\,2}(x)}dx.$$
- При неявном задании кривой $F(x,y)=0$ для вычисления длины дуги рекомендуется переходить к параметрическому либо явному функциональному представлению.
- Пусть P и Q - две различные точки кривой γ, g - прямая, содержащая точку P.



- Рис. 13. К определению касательной

- *Касательной* (рис. 13) к кривой γ в точке P называется прямая g, удовлетворяющая соотношению

$$\lim_{Q\to P}\frac{dist(Q,g)}{dist(Q,P)}=0.$$

- Уравнение касательной к кривой γ в ее точке P может быть вычислено одним из следующих способов ((X,Y) - координаты точки касательной):

при параметрическом задании $\vec{R}=\vec{r}(t_0)+u\vec{r}\,'(t_0),\ \dfrac{X-x(t_0)}{x'(t_0)}=\dfrac{Y-y(t_0)}{y'(t_0)};$

при явном функциональном задании $Y-y_0=f'(x_0)(X-x_0);$

при неявном задании $F_x(x_0,y_0)(X-x_0)+F_y(x_0,y_0)(Y-y_0)=0.$

- Уравнение нормали к кривой γ в ее точке P может быть вычислено одним из следующих способов ((X,Y) - координаты точки нормали):

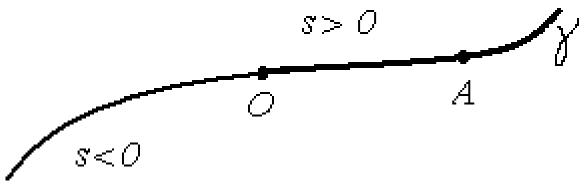
при параметрическом задании $\vec{R}=\vec{r}(t_0)+u\vec{n}(t_0),$

где вектор $\vec{n}(t_0)$ ортогонален вектору $\vec{r}\,'(t_0),$

или, в каноническом виде, $\dfrac{X-x(t_0)}{y'(t_0)}=\dfrac{Y-y(t_0)}{-x'(t_0)};$

при явном функциональном задании $Y-y_0=-(1/f'(x_0))(X-x_0);$

при неявном задании $F_y(x_0,y_0)(X-x_0)-F_x(x_0,y_0)(Y-y_0)=0.$

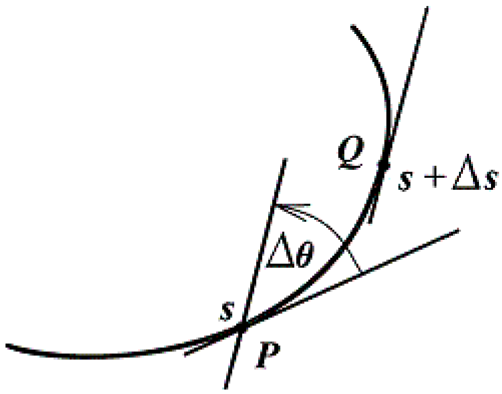


- Рис. 14. К определению естественного параметра кривой

- Зафиксируем на кривой γ (рис. 14) точку O и одно из двух возможных направлений. Тогда каждой точке A кривой может быть поставлено во взаимно однозначное соответствие число s, равное длине дуги OA, взятой со знаком "$+$", если дуга OA расположена в зафиксированном направлении относительно точки O, и со знаком "$-$" в противном случае. Указанное соответствие поставляет параметризацию кривой, называемую *естественной*. Параметр s называется *естественным параметром*.
- Несложно показать, что естественная параметризация кривой регулярна, причем

$$|\vec{r}\,'(s)| = 1. (4)$$

- Пусть P и Q - две различные точки кривой γ, соответствующие значениям s и $s+\Delta s$ естественного параметра (рис. 15). Тогда $|\Delta s|$ - длина дуги кривой, заключенной между точками P и Q. Пусть $\Delta\theta$ - величина ориентированного угла, образуемого касательной к кривой в точке Q по отношению к касательной в точке P.



- Рис. 15. К определению кривизны кривой

- *Кривизна* кривой γ в ее точке P - это предел

- $$k = \lim_{Q\to P} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \lim_{\Delta s\to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s}.$$
- Будем интерпретировать естественную параметризацию $\vec{r} = \vec{r}(s)$ кривой γ как кинематическое описание движения материальной точки. Уравнение (4) означает, что это - равномерное криволинейное движение с постоянной по модулю скоростью, равной единице, то есть движение, при котором точка проходит в единицу времени путь, равный единице длины. При этом направление скорости может меняться. Модуль кривизны в этой интерпретации - это модуль угловой скорости поворота вектора касательной к кривой при движении по кривой с единичной скоростью.
- Заметим, что угол между касательными в точках P и Q может быть включен в соотношение $|\vec{r}\,'(s+\Delta s) - \vec{r}\,'(s)| = 2\,|\sin(\Delta\theta/2)|$; тогда, используя первый замечательный предел, нетрудно прийти к выражению
- $$|k| = \left|\lim_{\Delta s\to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s}\right| = \lim_{\Delta s\to 0} \frac{|\Delta\theta|}{2|\sin(\Delta\theta/2)|} \cdot \frac{|\vec{r}\,'(s+\Delta s) - \vec{r}\,'(s)|}{|\Delta s|} = |\vec{r}\,''(s)|.$$
- Таким образом, модуль кривизны кривой γ в точке равен модулю ускорения в этой точке при равномерном криволинейном движении вдоль кривой γ.
- **Задачи**
- 1. Кривая задана в прямоугольной декартовой системе координат явной функциональной зависимостью. Изобразите на рисунке вид кривой. Укажите область изменения независимой координаты и область регулярности задания кривой. Напишите задание этой кривой а) в координатно-параметрической форме б) в векторно-параметрической форме в) в неявной форме.
- $$1)\ \ y = \sin x, \quad 2)\ \ y = \frac{x}{1-x^2}, \quad 3)\ \ y = \sqrt{\operatorname{tg} x}.$$
- 2. Кривая задана в полярной системе координат явной функциональной зависимостью. Изобразите на рисунке вид кривой. Укажите область изменения полярного угла и область регулярности задания кривой. Напишите задание этой кривой в прямоугольной декартовой системе координат в параметрической форме (координатной или векторной).
- $$1)\ \ \rho = a(1+\cos\varphi), \quad 2)\ \ \rho = a\varphi, \quad 3)\ \ \rho = a\cos 3\varphi, \quad 4)\ \ \rho = 2a|\cos 2\varphi|.$$
- 3. Кривая задана в прямоугольной декартовой системе координат неявной функциональной зависимостью. Укажите области регулярности этого задания кривой. Можно ли написать ее глобальное задание
  а) явной функциональной зависимостью,
  б) в параметрической форме?
  Можно ли сделать то же самое локально в окрестности каждой точки?
  Постройте те из указанных заданий кривой, которые возможны.
- $$1)\ \ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad 2)\ \ \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad 3)\ \ x - 2y - y^2 = 0, \quad 4)\ \ \frac{x^3}{a^3} + \frac{y^3}{b^3} = 1.$$
- 4. Кривая задана параметрическими уравнениями. Укажите область изменения параметра и области регулярности данного задания кривой.

$$1)\ x = t^2 - 2t + 5,\ \ y = t^2 - 2t + 1; \qquad 2)\ x = \frac{1-t}{1+t},\ \ y = \frac{t}{1+t};$$

$$3)\ x = \frac{a}{\sqrt{1+t^2}},\ \ y = \frac{at}{\sqrt{1+t^2}}; \qquad 4)\ x = \frac{1-t^2}{1+t^2},\ \ y = \frac{2t}{1+t^2}.$$

- 5. *Циклоида.* По прямой без проскальзывания катится окружность радиуса r. На окружности зафиксирована точка (рис. 16 а)). Напишите параметрические уравнения траектории этой точки.

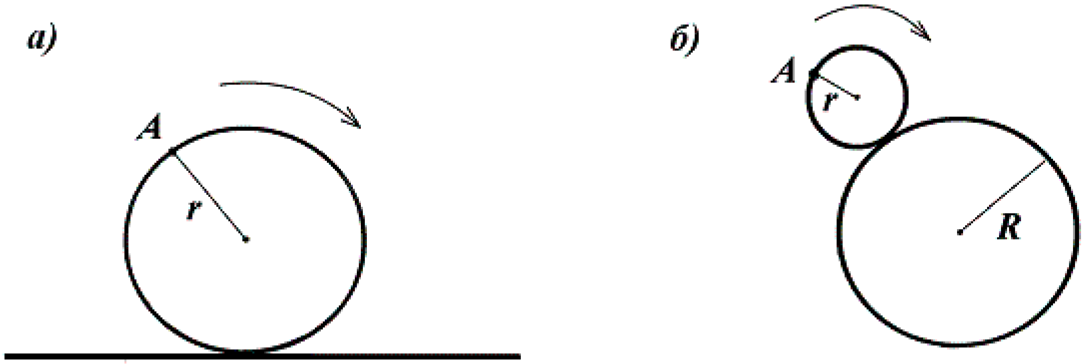


Рис. 16. К построению циклоиды и эпициклоиды

- 6. *Эпи- и гипоциклоиды.* По окружности радиуса R катится без проскальзывания окружность радиуса $r < R$ с отмеченной точкой, оставаясь вне (внутри) большей окружности (рис. 16 б)). Напишите параметрические уравнения траектории отмеченной точки.
- 7. Вычислите уравнения асимптот данных кривых, заданных явной функциональной зависимостью в декартовых координатах:

$$1)\ y = \frac{x^2}{x^2-1}; \qquad 2)\ y = \frac{x^3}{x^2-4}; \qquad 3)\ y = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-2};$$

- в полярных координатах:

$$4)\ \rho = \frac{3}{\varphi}; \qquad 5)\ \rho = \frac{a}{\sin\varphi} + l,\ \ (a, l > 0); \qquad 6)\ \rho = \frac{a}{\cos\varphi} + l,\ \ (a, l > 0);$$

- неявной функциональной зависимостью:

$$7)\ x^2y - 4y^2x - 6x^2 + 5 = 0; \qquad 8)\ y^3 - x^3 - x^2 - y^2 = 0;$$

$$9)\ x^3 - y^3 = (y - x)^3;$$

- параметрическим представлением:

$$10)\ x = \frac{t^2}{t-1},\ y = \frac{t}{t^2-1}; \qquad 11)\ x = 2t + 3 + \frac{1}{t-1},\ y = -t + 2 + \frac{4}{t-1};$$

$$12)\ \vec{r} = \left(\frac{t}{1-t^2}, \frac{t(1-2t^2)}{1-t^2}\right); \qquad 13)\ \vec{r} = \left(\frac{2+t^2}{1+t^2}, t + \frac{t}{1+t^2}\right).$$

- 8. Кривая задана параметрически в прямоугольной декартовой системе координат. Напишите уравнения касательной и нормали в точке кривой, соответствующей значению параметра $t_0 = 0$. Укажите координаты единичного вектора касательной

и единичного вектора нормали в этой точке. Напишите уравнения семейства касательных и семейства нормалей в регулярных точках данной кривой. Напишите уравнение семейства единичных касательных векторов данной кривой.

1) $\vec{r} = (a\cos t,\ \ b\sin t);$ 2) $\vec{r} = (a\,\mathrm{ch}\,t,\ \ b\,\mathrm{sh}\,t);$

3) $\vec{r} = (a(t - \sin t),\ \ a(1 - \cos t));$ 4) $\vec{r} = (t^3 - 2t,\ \ t^2 + 3).$

- 9. Найдите величину угла между кривыми в точке их пересечения.

1) $y = x^2,\ \ y = x^3;$ 2) $xy = m,\ \ x^2 - y^2 = n,\ \ m, n = const > 0.$

3) $y = x^2,\ \ x = y^2;$ 4) $x^2 + y^2 = a^2,\ \ y^2 = px,\ \ a, p = const > 0.$

- 10. Покажите, что касательная в любой точке кривой $\rho = e^{\varphi}$ образует с полярным радиусом постоянный угол, и вычислите его.
- 11. Покажите, что касательные к кардиоиде $\rho = 2a(1 - \cos\varphi)$, проведенные в точках пересечения кардиоиды с хордами, проходящими через полюс, перпендикулярны.
- 12. Покажите, что касательные к лемнискате Бернулли $\rho^2 = 2a^2\cos 2\varphi$, проведенные в точках пересечения с хордой, проходящей через полюс, параллельны.
- 13. Покажите, что отрезок касательной к гиперболе $xy = a^2$, заключенный между осями координат, делится точкой касания пополам.
- 14. Покажите, что отрезок касательной к трактрисе
  - $\vec{r} = (a\sin t, a(\cos t + \ln\mathrm{tg}\,\frac{t}{2})),$
- заключенный между точкой касания и осью y, имеет постоянную длину.
- 15. Вычислите длину дуги кривой

1) $y = \ln\cos x,\ \ x \in [0, \pi/3];$ 2) $x = a\cos^3 t,\ \ y = a\sin^3 t;$

3) $x = a\cos t,\ \ y = b\sin t;$ 4) $\rho = a\varphi,\ \ \varphi \in [0, 2\pi].$

- 16. Для данных кривых найдите вид функции $s = s(x),$ $s = s(t),$ $s = s(\varphi)$, в зависимости от способа задания кривой. Является ли эта функция непрерывной? Монотонной? Дифференцируемой? С какими фактами и теоремами геометрии и математического анализа это связано?

1) $y = a\,\mathrm{ch}(x/a);$ 2) $\vec{r} = (a(t - \sin t),\ \ a(1 - \cos t)),\ \ a = const > 0;$

3) $\rho = a(1 + \cos\varphi);$ 4) $\vec{r} = (a\sin t,\ \ a(\cos t + \ln\mathrm{tg}\,\frac{t}{2})).$

- 17. Вычислите кривизну данной кривой в заданной ее точке, сначала используя готовую формулу, а затем по следующему плану: получите уравнение поля скоростей при равномерном движении по этой кривой, затем вычислите абсолютную величину его производной по "времени" $t = s$.

1) $y = \sin x$ в вершинах кривой; 2) $y = x^3 + 3x^2 - 2,\ \ x_0 = 2;$

3) $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2}),\ \ x_0=0$; 4) $x=a\cos^3 t,\ \ y=a\sin^3 t,\ \ t=\pi/6$;
5) $x=t^3+1,\ \ y=2t-t^4,\ \ t=1/2;$ 6) $x=a\cos t,\ \ y=a\sin t,\ \ t=t_0.$

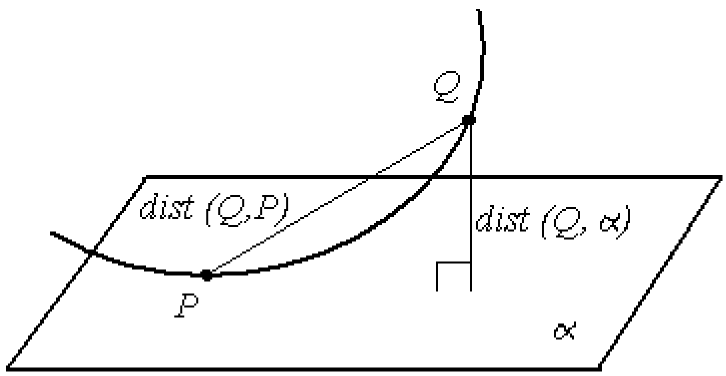
- 18. Кривизна - характеристика второго порядка. Разлагая задание кривой в окрестности данной точки по формуле Тейлора с точностью до второго порядка, получим задание кривой второго порядка, которую назовем соприкасающейся параболой этой кривой в данной ее точке. Вычислите кривизну кривой в данной точке, ее соприкасающейся параболы в этой точке и сравните результаты.
  1) $y=\sin x,\ \ x_0=0$; 2) $y=x^3+x^2-2,\ \ x_0=2;$
  3) $x=t^3+1,\ \ y=2t-t^4,\ \ t_0=1;$ 4) $x=a\cos t,\ \ y=a\sin t,\ \ t=t_0.$
- *Огибающая семейства плоских кривых*, заданного уравнением $F(x,y,C)=0$ - это кривая, удовлетворяющая системе уравнений
  - $$F(x,y,C)=0,\ \ F_C(x,y,C)=0$$
- и имеющая общую касательную с какой-либо кривой семейства.
- 19. *Парабола безопасности.* Из точки O под всевозможными углами $\alpha\in(0,\pi/2)$ к горизонту производятся выстрелы с начальной скоростью снаряда v_0. Найдите уравнение границы области, недостижимой для снарядов.

§2. Пространственные кривые

- **Вопросы теории**
- Пространственные кривые. Задание пространственной кривой. Регулярное задание кривой. Регулярная кривая. Неявное задание пространственной кривой. Касательная к пространственной кривой. Единичный вектор касательной. Бинормаль и главная нормаль и их единичные векторы. Нормальная, соприкасающаяся и спрямляющая плоскости. Ускорение при криволинейном движении и векторы сопровождающего трехгранника. Кривизна пространственной кривой. Теорема о прямой. Кручение пространственной кривой. Теорема о плоской кривой. Формулы Френе. Естественный параметр и натуральные уравнения кривой.
- **Основные определения, результаты, комментарии**
- *Элементарной кривой в пространстве* называется образ открытого интервала $(a,b)\subset\mathbb{R}$ при его гомеоморфизме $f:(a,b)\to\mathbb{R}^3$ в евклидово трехмерное пространство.
- *Общей кривой на плоскости* называется подмножество евклидова пространства, локально гомеоморфное прямой.
- Как и в случае плоских кривых, всякая общая кривая допускает покрытие элементарными кривыми.
- Кривая γ задана *неявным способом*
  - $$F(x,y,z)=0,\ \ G(x,y,z)=0,(5)$$
- если координаты каждой точки кривой γ удовлетворяют обоим уравнениям $F(x,y,z)=0,$ $G(x,y,z)=0$.

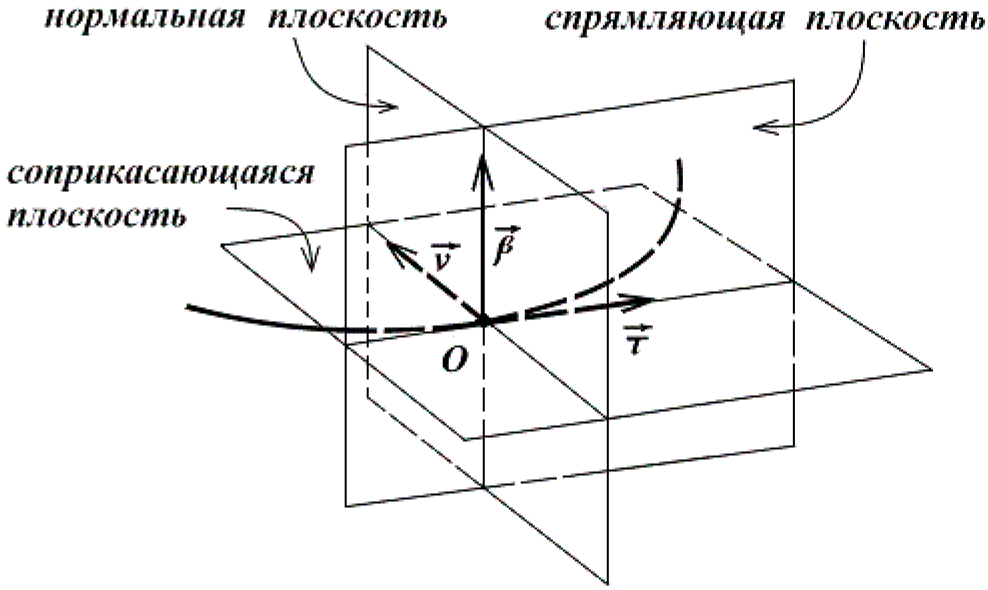
- Наиболее удобны и наиболее часто используются *векторно-параметрическое представление*
  - $\vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)),\ \ t \in (a, b)$
- и *координатно-параметрическое представление*
  - $x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t),\ t \in (a, b),$
- отличающиеся лишь формой записи.
- Определение регулярности параметрического представления пространственной кривой полностью аналогично плоскому случаю.
- Неявное задание (5) кривой регулярно в точке P, если матрица частных производных
  - $\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{pmatrix} (6)$
- имеет в этой точке ранг 2.
- Понятия длины кривой, ее естественной параметризации, а также определение касательной полностью аналогичны тем же понятиям для плоских кривых.

  Направляющий вектор касательной - это, по-прежнему, производная $\vec{r}'(t)$, имеющая физический смысл скорости, если параметрическое представление кривой интерпретировать как кинематическое описание движения точки.
- *Нормальная плоскость* кривой в точке P- это плоскость, проходящая через точку Pортогонально касательной.
- *Соприкасающейся плоскостью кривой* в ее точке P(рис. 17) называется содержащая эту точку плоскость α, удовлетворяющая соотношению
  - $\lim\limits_{Q \to P} \dfrac{dist(Q, \alpha)}{dist^2(Q, P)} = 0,$
- где Q- точка, принадлежащая элементарной окрестности точки P.



-
  - Рис. 17. К определению соприкасающейся плоскости
- *Спрямляющей плоскостью кривой* в ее точке Pназывается содержащая эту точку плоскость, ортогональная нормальной и соприкасающейся плоскостям в этой точке.

- Прямые, ортогональные соприкасающейся и спрямляющей плоскостям в точке P, называются соответственно *бинормалью* и *главной нормалью* кривой в точке P.
- Нормальная, соприкасающаяся и спрямляющая плоскости образуют *сопровождающий трехгранник кривой*, или *трехгранник Френе*, в точке P, и называются его *гранями*. Касательная, бинормаль и главная нормаль называются *ребрами* сопровождающего трехгранника (рис. 18).



- Рис. 18. Сопровождающий трехгранник кривой
- Уравнения элементов сопровождающего трехгранника вычисляются по следующим правилам:

Касательная	Нормальная плоскость
$\vec R = \vec r(t_0) + u\vec r\,'(t_0)$	$(\vec R - \vec r(t_0), \vec r\,'(t_0)) = 0$
Бинормаль	Соприкасающаяся плоскость
$\vec R = \vec r(t_0) + u\vec r\,'(t_0) \times \vec r\,''(t_0)$	$(\vec R - \vec r(t_0), \vec r\,'(t_0) \times \vec r\,''(t_0)) = 0$
Главная нормаль $\vec R = \vec r(t_0)+$	Спрямляющая плоскость
$+u(\vec r\,'(t_0) \times \vec r\,''(t_0)) \times \vec r\,'(t_0)$	$(\vec R - \vec r(t_0), (\vec r\,'(t_0) \times \vec r\,''(t_0)) \times \vec r\,'(t_0)) = 0$

- Единичные векторы

касательной $\vec\tau = \dfrac{\vec r\,'(t)}{|\vec r\,'(t)|}$,

главной нормали $\vec\nu = \dfrac{(\vec r\,'(t) \times \vec r\,''(t)) \times \vec r\,'(t)}{|\vec r\,'(t) \times \vec r\,''(t)| \cdot |\vec r\,'(t)|}$,

бинормали $\vec{\beta} = \dfrac{\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)}{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}$

-

образуют в точке t правый ортонормированный репер.

- Если параметризация *естественная*, то вектор главной нормали может быть вычислен по формуле $\vec{\nu} = \vec{r}''(s)/|\vec{r}''(s)|$.
- Вектор ускорения может быть разложен в сумму двух составляющих: нормальной (ортогональной вектору скорости) и тангенциальной (параллельной вектору скорости). При этом нормальная составляющая ускорения сонаправлена единичному вектору главной нормали.
- Пусть P и Q - две различные точки кривой γ, соответствующие значениям s и $s + \Delta s$ естественного параметра. Тогда $|\Delta s|$ - длина дуги кривой, заключенной между точками P и Q. Пусть $\Delta\theta$ - величина угла, образуемого касательной к кривой в точке Q по отношению к касательной в точке P. *Кривизна* кривой γ в ее точке P - это предел

$$k = \lim_{Q \to P} \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s}.$$

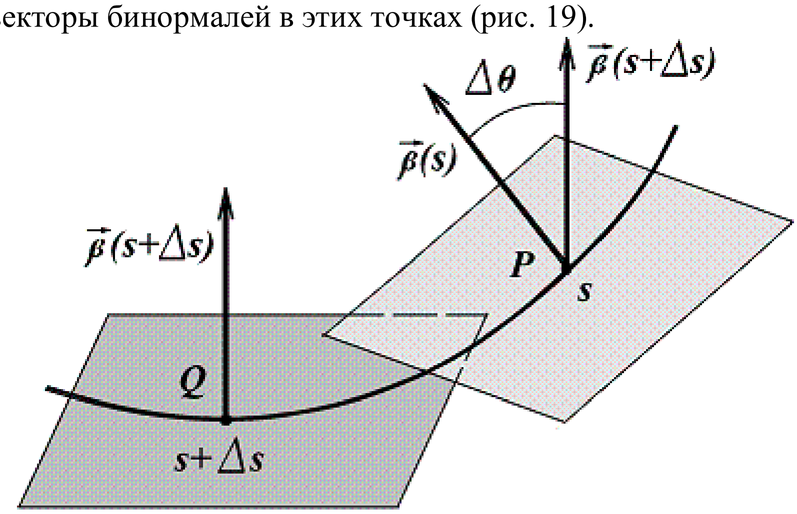
- В отличие от кривизны плоской кривой, *кривизна пространственной кривой всегда положительна*. Кривизна пространственной кривой в регулярной точке может быть вычислена по формулам:

$$k = \frac{|\vec{r}'(t) \times \vec{r}''(t)|}{|\vec{r}'(t)|^3}, \text{ если параметризация произвольная;}$$

$k = |\vec{r}''(s)|,$ если параметризация естественная.

-

- Пусть P и Q - две различные точки кривой γ, соответствующие значениям естественного параметра s и $s + \Delta s$ соответственно, $\vec{\beta}(s)$ и $\vec{\beta}(s + \Delta s)$ - единичные векторы бинормалей в этих точках (рис. 19).



-

- Рис. 19. К определению кручения кривой
- Обозначим за $\Delta\theta$ величину угла между ними. Очевидно, этот угол равен углу, образованному соприкасающимися плоскостями в точках P и Q.
- *Абсолютным кручением кривой* в точке P называют величину

$$|\varkappa| = \lim_{Q\to P}\frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\theta}{\Delta s}$$

- *Кручение* кривой γ определяется в соответствии со следующим правилом: $\varkappa = |\varkappa|,$ если при движении вдоль кривой по направлению возрастания параметра вектор бинормали $\vec{\beta}$ поворачивается в сторону, указываемую вектором $\vec{\nu}$, $\varkappa = -|\varkappa|$ в противном случае. Наглядно это означает, что кривая с положительным кручением "закручена" по правилу правого винта.
- Кручение кривой в точке, соответствующей значению параметра t, может быть вычислено по следующим формулам:

$$\varkappa = \frac{(\vec{r}\,'(t),\vec{r}\,''(t),\vec{r}\,'''(t))}{(\vec{r}\,'(t)\times\vec{r}\,''(t))^2},\ \text{если параметризация произвольная,}$$

$$\varkappa = \frac{(\vec{r}\,'(t),\vec{r}\,''(t),\vec{r}\,'''(t))}{k^2},\ \text{если параметризация естественная.}$$

- Для производных векторов $\vec{\tau}$, $\vec{\nu}$, $\vec{\beta}$ по естественному параметру справедливы *формулы Френе*:

$$\vec{\tau}\,' = k\,\vec{\nu},$$
$$\vec{\nu}\,' = -k\,\vec{\tau} - \varkappa\,\vec{\beta},$$
$$\vec{\beta}\,' = \varkappa\,\vec{\nu}.$$

- Уравнения $k = k(s)$ и $\varkappa = \varkappa(s)$ называются *натуральными уравнениями кривой.* По натуральным уравнениям вид кривой может быть восстановлен с точностью до перемещения. В большинстве случаев решение такой задачи оказывается очень сложным.
- **Задачи**
- 1. Для данных представлений кривых укажите область допустимых значений параметра и область значений параметра, в которой задание кривой регулярно.

1) $x = a\cos 2t,\quad y = a\sin 2t,\qquad z = 0,\qquad 0\le t\le 2\pi,\quad a\ne 0;$

2) $x = a\cos t,\quad y = a\sin t,\qquad z = t,\qquad 0\le t\le 4\pi;$

3) $x=\cos u^2, \quad y=\sin u^2, \qquad z=2u, \quad 0\le u\le 2\pi;$

4) $x=t^2-1, \quad y=t/(t^2-1), \quad z=2t$.

- 2. Кривая задана неявными уравнениями. Изобразите на рисунке вид кривой. Постройте какое-нибудь параметрическое представления этой кривой. Укажите область допустимого изменения параметра и область регулярности параметризации.

  1) $x^2+y^2=R^2, \quad z=x^2-y^2;$

  2) $x^2+y^2=z^2, \quad x^2+(z-a)^2=R^2, \quad a>R, \quad y>0;$

  3) $x^2+y^2=z^2, \quad (x-R)^2+y^2+z^2=R^2.$
- 3. *Кривая Вивиани* образована пересечением сферы радиуса $2R$ и цилиндра радиуса R, проходящего через центр сферы. Постройте параметрическое представление кривой Вивиани.
- 4. *Винтовая линия.* Окружность радиуса a движется так, что ее центр перемещается вдоль оси Oz, плоскость ортогональна оси Oz. По окружности равномерно движется точка. В начальный момент времени $t_0=0$ точка имеет координаты $(a,0,0)$. Составьте параметрические уравнения кривой, описываемой данной точкой.
- 5. Кривая γ задана пересечением цилиндрических поверхностей $z^2=x$ и $y^2=1-x.$ Постройте параметрическое представление кривой γ, не содержащее радикалов, и дайте ее изображение.
- 6. Покажите, что линия
  - $\gamma: \ x=\sin 2\varphi; \ \ y=1-\cos 2\varphi; \ \ z=2\cos\varphi$
- принадлежит сфере и является линией пересечения параболического и кругового цилиндров.
- 7. Найдите длину дуги линии
  - $x^3=3a^2y; \quad 2xz=a^2$
- между плоскостями $y=a/3$ и $y=9a$.
- 8. Покажите, что кривая $x=\cos^3 t; \ y=\sin^3 t; \ z=\cos 2t$ замкнута и имеет длину $s=10$.
- 9. Запишите в естественной параметризации

  а) винтовую линию $x=a\cos t; \ y=a\sin t; \ z=bt$;

  б) гиперболическую винтовую линию $x=a\,\mathrm{ch}\,t; \ y=a\,\mathrm{sh}\,t; \ z=at$.
- 10. Кривая задана параметрически:
  - $$x=\frac{t^4}{4}, \ y=\frac{t^3}{3}, \ z=\frac{t^2}{2}, \ t>0.$$

- Напишите уравнения
  а) касательной и нормальной плоскости в точке (1/4; 1/3; 1/2);
  б) касательной, параллельной плоскости $x - 3y + 2z = 0$.
- 11. Найдите линию, по которой касательные к линии
- $$x = a\cos t,\ \ y = a\sin t,\ \ z = t^2$$
- пересекают плоскость xOy.
- *Сферической индикатрисой* данной кривой называется геометрическое место концов единичных касательных векторов, отложенных от начала координат.
- 12. Дана винтовая линия
- $$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = bt.$$
- а) Напишите уравнение семейства касательных этой кривой;
  б) убедитесь в том, что все касательные к винтовой линии образуют с плоскостью xOy один и тот же угол;
  в) составьте уравнение кривой, образуемой точками пересечения касательных с плоскостью xOy;
  г) найдите сферическую индикатрису винтовой линии.
- 13. Докажите, что все нормальные плоскости кривой Вивиани (задача 3) проходят через начало координат.
- 14. Составьте уравнения бинормали и главной нормали кривой в указанной точке:
  1) $x = t,\quad y = t^2,\quad z = t^3,\quad t_0 = 0;$
  2) $x = a\cos t,\ \ y = b\sin t,\ \ z = t,\quad t_0 = \pi/2;$
  3) $x = t^2 - 1,\ \ y = t,\quad z = t^3 - t,\ \ t_0 = 1$;
  4) $x = a\cos t,\ \ y = b\sin t,\ \ z = t^2,\quad t_0 = \pi.$
- 15. Найдите точки на кривой
- $$x = \frac{2}{t},\ \ y = \ln t,\ \ z = -t^2,$$
- в которых бинормаль параллельна плоскости $x - y + 8z + 2 = 0$.
- 16. Материальная точка движется в пространстве по закону
- $$x(t) = 3t - t^3,\ \ y(t) = 1 - t,\ \ z(t) = -3 - 9t + 6t^2 - t^3.$$
- Укажите моменты времени, в которые
  а) ее скорость равна нулю, и сравните их со значениями параметра t, при которых параметризация траектории нерегулярна;
  б) нормальное ускорение точки ортогонально Oz.
- 17. Составьте уравнения ребер и граней сопровождающего трехгранника данной кривой в указанной точке
  1) $\vec{r}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt),\ \ t_0 = \pi/2;$
  2) $\vec{r}(t) = (R + R\cos t, R\sin t, 2R\sin(t/2)),\ \ t_0 = 2\pi;$

3) $x = y^2, \;\; x^2 = z, \;\; M_0(1,1,1)$;

4) $xy = z^2, \;\; x^2 + y^2 = z^2 + 1, \;\; M_0(1,1,1)$.

- 18. Для данной кривой вычислите кривизну в данной точке сначала по готовой формуле, а затем по следующему плану: 1) составьте уравнение поля единичных касательных векторов данной кривой; 2) вычислите абсолютную величину производной этого поля по естественному параметру. Результаты сравните.

  1) $x = a\cos t, \;\; y = a\sin t, \;\; z = bt^2, \;\; a > 0, \;\; b \neq 0, \;\; t_0 = \pi/2$

  2) $x = 2t, \qquad y = \ln t, \qquad z = t^2, \quad t_0 = 1.$
- 19. Для кривых задачи 18 вычислите абсолютное кручение в данной точке сначала по готовой формуле, а затем по следующему плану: 1) составьте уравнение поля единичных векторов бинормали данной кривой; 2) вычислите абсолютную величину производной этого поля по естественному параметру. Результаты сравните.
- 20. Вычислите кривизну и кручение данной кривой произвольной регулярной точке:

  1) $x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt, \;\; a > 0, \;\; b \neq 0$;

  2) $x = a\,\mathrm{ch}\,t, \quad y = a\,\mathrm{sh}\,t, \quad z = at$;

  3) $x = a\cos^3 t, \;\; y = a\sin^3 t, \;\; z = \cos 2t$;

  4) $x^2 = z, \qquad y^2 = z$.
- 21. Найдите точки распрямления следующих кривых:

  1) $y = x^3, \qquad y = z$;

  2) $x = t - t^3, \;\; y = t^2 + 1, \;\; z = t^2 - t$;

  3) $x = \cos^3 t, \;\; y = \sin^3 t, \quad z = t$.
- 22. Найдите точки уплощения и дуги, на которых кручение сохраняет свой знак, у следующих кривых:

  1) $x = t, \qquad y = \sin t, \quad z = \sin 3t$;

  2) $x = \cos u, \;\; y = \sin u, \;\; z = u^3 - 9u.$
- 23. Напишите натуральные уравнения, которым удовлетворяют следующие кривые:

  1) $x = a\cos t, \quad y = a\sin t, \quad z = bt, \;\; a > 0, \;\; b \neq 0$;

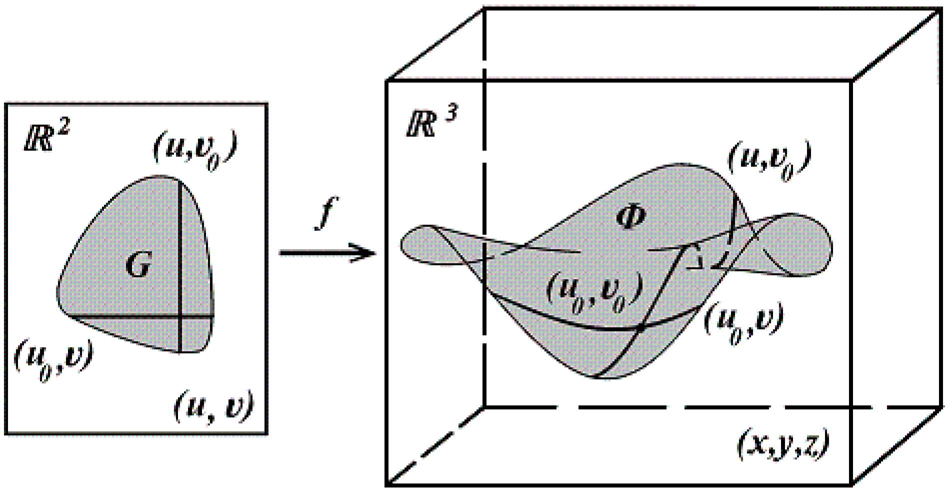
  2) $x = at, \qquad y = bt^2, \qquad z = ct^2.$
- 24. Найдите точки на кривой
  - $x = \cos^3 t, \; y = \sin^3 t, \; z = \cos 2t,$
- в которых кривизна принимает локально минимальное значение.
- 25. Найдите точки на кривой

- $$x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t),\ z = 4a\cos\frac{t}{2},$$
- в которых радиус кривизны достигает локального максимума.
- 26. Докажите, что следующие кривые плоские, и составьте уравнения плоскостей, в которых они расположены:
- $$1)\ x = \frac{1}{1-t}, \quad y = \frac{1}{1-t^2}, \quad z = \frac{1}{1+t}; \qquad 2)\ x = t^2 - 1, \quad y = t^2 + 2, \quad z = t^3.$$
- 27. Найдите такую функцию $f(t)$, чтобы кривая
- $$x = a\cos t,\ y = a\sin t,\ z = f(t)$$
- была плоской. Решите задачу двумя способами: 1) используя условие плоскости и 2) используя тот факт, что искомая кривая принадлежит круговому цилиндру (составьте его уравнение!). Результаты сравните.
- 28. Докажите, что если все соприкасающиеся плоскости линии проходят через неподвижную точку A, то линия плоская.
- 29. Докажите, что если соприкасающиеся плоскости линии (отличной от прямой) параллельны некоторому вектору $\vec{a}$, то линия плоская.
- 30. Докажите, что если все нормальные плоскости линии параллельны некоторому вектору $\vec{a}$, то линия или прямая, или плоская.

§3. Поверхность. Метрические задачи на поверхности

- **Вопросы теории**
- Поверхность. Способы задания поверхности. Регулярная параметризация поверхности. Координатные линии и координатная сеть на поверхности. Задача картографии. Касательная плоскость поверхности в ее гладкой точке. Нормаль поверхности в ее гладкой точке. Первая квадратичная форма поверхности. Длина дуги кривой на поверхности. Угол между кривыми на поверхности. Ортогональные траектории семейства кривых на поверхности. Площадь поверхности. Конформное отображение поверхностей. Изометрия поверхностей.
- **Основные определения, результаты, комментарии**
- *Элементарной областью* на плоскости переменных u, v называется область, гомеоморфная кругу. *Элементарной поверхностью* в пространстве переменных x, y, z называется множество точек пространства, гомеоморфное элементарной области на плоскости. Функциональное задание гомеоморфизма f (рис. 20)
- $$x = x(u, v),\ \ y = y(u, v),\ \ z = z(u, v)$$
- называется параметрическим представлением поверхности. Образы прямых вида $u = u_0$ и $v = v_0$ называются *координатными линиями на поверхности* (рис. 20) и задаются уравнениями
- $$x = x(u_0, v),\ \ y = y(u_0, v),\ \ z = z(u_0, v)$$
- или
- $$x = x(u, v_0),\ \ y = y(u, v_0),\ \ z = z(u, v_0),$$

- и каждой точке ставится в соответствие пара чисел (u_0, v_0), называемая *криволинейными координатами.*



- Рис. 20. Элементарная поверхность и координатные линии

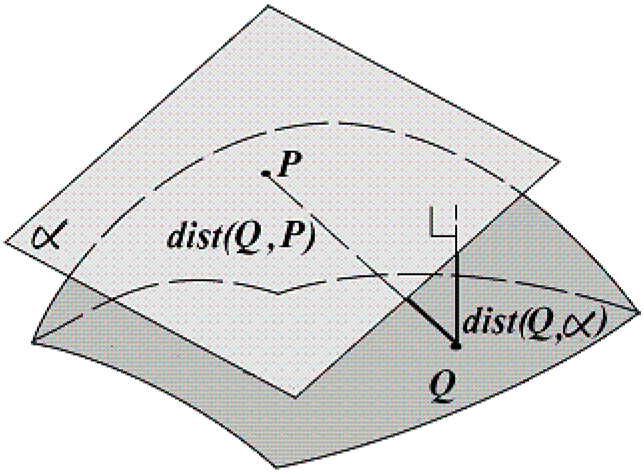
- *Общей поверхностью* называется подмножество евклидова пространства, локально гомеоморфное евклидовой плоскости. Необходимое и достаточное условие локальной гомеоморфности отображения, задаваемого в области G плоскости переменных u, v регулярными функциями

$$x = x(u, v), \;\; y = y(u, v), \;\; z = z(u, v),$$

- - это равенство

$$rank \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} = 2.$$

- Очевидно, что общая поверхность допускает покрытие элементарными поверхностями.
- Сеть координатных линий поверхности, или *координатная сеть*, называется *правильной* в точке P, если в этой точке выполнено условие $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}.$ Нетрудно заметить, что частные производные $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ в данной точке (u_0, v_0) представляют собой касательные векторы к координатным линиям $v = v_0$ и $u = u_0$ соответственно. Поэтому условие правильности координатной сети в точке требует, чтобы касательные векторы к координатным линиям в этой точке были неколлинеарны. В дальнейшем будут рассматриваться только такие точки на поверхности.
- Будем называть поверхность C^k-регулярной, если она обладает параметризацией $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, имеющей непрерывные частные производные порядка k, причем в каждой точке выполнено условие $\vec{r}_u \times \vec{r}_v \neq \vec{0}.$
- Поверхность задана неявным уравнением $F(x, y, z) = 0,$ если координаты каждой ее точки $P(x, y, z)$ удовлетворяют этому уравнению.



- Рис. 21. К определению касательной плоскости

- Пусть P и Q - две различные точки на поверхности Φ. *Касательной плоскостью поверхности* Φ в точке P (рис. 21) называется плоскость α, проходящая через точку P и удовлетворяющая соотношению

$$\lim_{Q\to P}\frac{dist(Q,\alpha)}{dist(P,Q)}=0.$$

- Уравнение касательной плоскости поверхности Φ в точке P с криволинейными координатами (u_0,v_0) (и декартовыми координатами (x_0,y_0,z_0)) может быть вычислено по одной из следующих формул:

$$((\vec{R}-\vec{r}(u_0,v_0)),\vec{r}_u(u_0,v_0),\vec{r}_v(u_0,v_0))=0$$ при параметрическом задании,

$$(X-x_0)F_x(x_0,y_0,z_0)+(Y-y_0)F_y(x_0,y_0,z_0)+(Z-z_0)F_x(x_0,y_0,z_0)=0$$

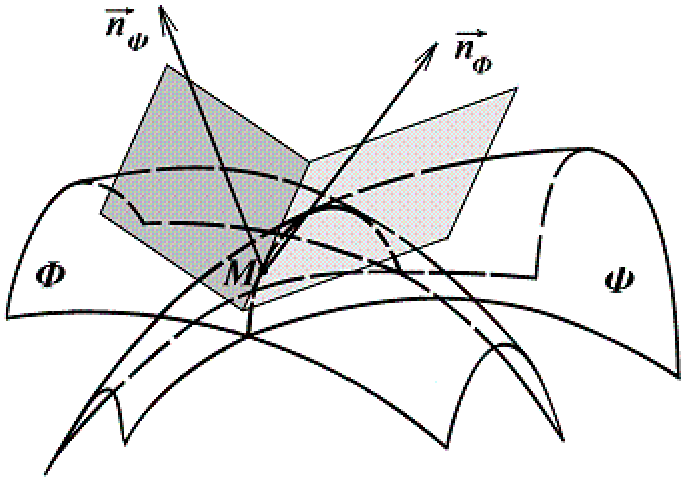
при неявном задании.

- Первое из уравнений означает, что векторы $\vec{r}_u(u_0,v_0),\vec{r}_v(u_0,v_0)$ образуют базис касательных векторов в точке (u_0,v_0).
- *Нормаль поверхности* в точке P - это прямая, ортогональная касательной плоскости, проведенной в этой точке поверхности. Уравнения нормали поверхности в точке P с криволинейными координатами (u_0,v_0) (и декартовыми координатами (x_0,y_0,z_0)) могут быть вычислены по формулам

$$\frac{X-x_0}{\begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}}=\frac{Y-y_0}{\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}}=\frac{Z-z_0}{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}}\ \text{при параметрическом задании,}$$

$$\frac{X-x_0}{F_x}=\frac{Y-y_0}{F_y}=\frac{Z-z_0}{F_z}$$ при неявном задании.

-
Все частные производные в этих формулах вычислены в точке P.
- Теперь мы можем дать геометрическую интерпретацию условию регулярности неявного задания кривой в пространстве. Поверхности Φ и Ψ, имеющие общую точку M, назовем *пересекающимися трансверсально в точке* M, если их касательные плоскости, проведенные в этой точке, *пересекаются*.



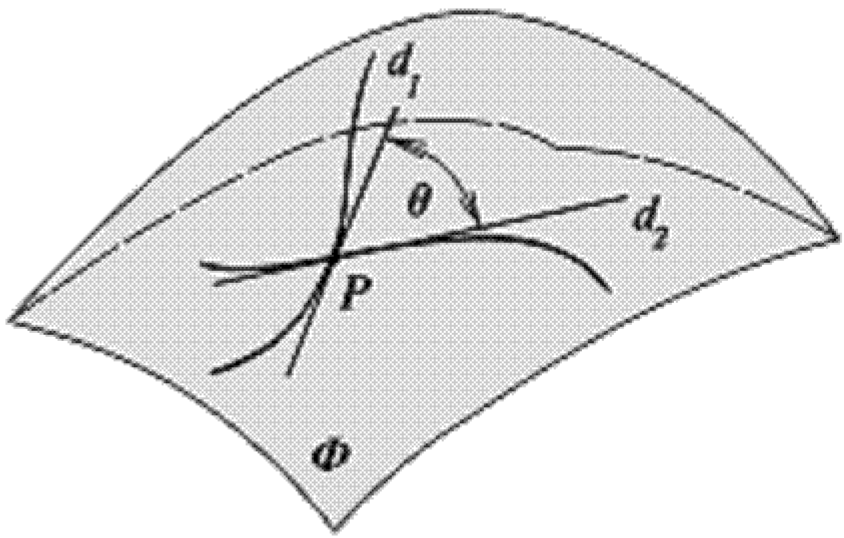
-
- Рис. 22. Трансверсальное пересечение поверхностей
- Согласно известной теореме аналитической геометрии, для этого необходимо и достаточно, чтобы векторы нормали касательных плоскостей, а следовательно, векторы нормали поверхностей, были *неколлинеарны* в точке M(рис. 22). Таким образом, условие максимальности ранга матрицы (6) - это условие трансверсальности пересечения поверхностей в точке.
- *Первой квадратичной формой поверхности* Φ называется *скалярный квадрат первого дифференциала радиус-вектора ее точки*:
- $$I = (d\vec{r})^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2,$$
- где введены канонические обозначения
- $$E = (\vec{r}_u(u,v))^2,\ F = (\vec{r}_u(u,v), \vec{r}_v(u,v)),\ G = (\vec{r}_v(u,v))^2.$$
- При этом коэффициенты E, F, G являются функциями точки поверхности.
- Первая квадратичная форма поверхности несет информацию о свойствах измерения длин, углов и площадей на поверхности, являясь своеобразным "справочником геодезиста". Первую квадратичную форму поверхности называют также *метрической формой*.
- Так как в евклидовом пространстве скалярный квадрат любого ненулевого вектора строго положителен, то и первая квадратичная форма любой регулярной поверхности в евклидовом пространстве *положительно определена*, то есть $I \geq 0$, и *невырождена*, то есть $I = 0$ только при $d\vec{r} = \vec{0}$.
- Длина кривой γ на поверхности может быть представлена криволинейным интегралом
- $$\ell(\gamma) = \int\limits_{\gamma} \sqrt{I}.$$

- Если кривая γ задана параметрическим способом $u = u(t), v = v(t)$, $t \in [a, b],$ то первый дифференциал радиус-вектора точки вдоль этой кривой при подстановке $du = u'(t)\,dt$, $dv = v'(t)\,dt$ принимает вид
  - $$d\vec{r} = \vec{r}_u(u(t), v(t))\,u'(t)\,dt + \vec{r}_v(u(t), v(t))\,v'(t)\,dt.$$
- Подстановка полученного выражения в формулу длины кривой на поверхности приводит к результату (интеграл определенный!)

$$\ell(\gamma) = \int_a^b [(\vec{r}_u(u(t), v(t)))^2 u'^{\,2}(t) + 2(\vec{r}_u(u(t), v(t)), \vec{r}_v(u(t), v(t)))u'(t)v'(t) +$$

$$+(\vec{r}_v(u(t), v(t)))^2 v'^{\,2}(t))]^{1/2} dt = \int_a^b [Eu'^{\,2}(t) + 2Fu'(t)v'(t) + Gv'^{\,2}(t)]^{1/2} dt.$$

- Дифференциал $d\vec{r} = \vec{r}_u du + \vec{r}_v dv$ в фиксированном направлении можно интерпретировать как касательный вектор бесконечно малой длины, имеющий в базисе касательных векторов $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ координаты $(du, dv).$ Назовем *направлением* в точке (u_0, v_0) класс коллинеарных бесконечно малых касательных векторов.



  - Рис. 23. Угол между кривыми на поверхности
- Тогда направление может быть указано "однородными координатами" $d = (du : dv)$. Очевидно взаимно однозначное соответствие (и даже гомеоморфизм) множества направлений в точке поверхности и проективной прямой.

- Углом между кривыми на поверхности (рис. 23), пересекающимися в точке P, называется угол, образованный касательными направлениями к кривым в этой точке. Рассмотрим два направления $d_1 = (d_1 u : d_1 v)$ и $d_2 = (d_2 u : d_2 v)$.
- Угол θ между направлениями можно вычислять как угол между их представителями.
- Его косинус равен

$$\cos\theta = \frac{(d_1\vec{r},\, d_2\vec{r})}{|d_1\vec{r}|\cdot|d_2\vec{r}|} =$$
$$= \frac{E\,d_1u\,d_2u + F(d_1u\,d_2v + d_2u\,d_1v) + G\,d_1v\,d_2v}{\sqrt{(E\,d_1u^2 + 2F\,d_1u\,d_1v + G\,d_1v^2)(E\,d_2u^2 + 2F\,d_2u\,d_2v + G\,d_2v^2)}} =$$
$$= \frac{I(d_1,d_2)}{\sqrt{I(d_1)I(d_2)}}.$$

- Направления d_1 и d_2 на поверхности ортогональны тогда и только тогда, когда $I(d_1,d_2)=0$. Пусть в окрестности точки (u_0,v_0) на поверхности Φ задано семейство кривых, представленных неявными уравнениями вида $\varphi(u,v)=C$, где C - постоянные, φ - дифференцируемая функция. Пусть в точке (u_0,v_0) выполнено условие $\varphi_u^2+\varphi_v^2\neq 0.$ Линии семейства имеют в каждой точке рассматриваемой окрестности направление $(\varphi_v : -\varphi_u).$ Тогда направление $(du : dv)$ линии, ортогональной линиям семейства $\varphi(u,v)=C$, удовлетворяет соотношению ортогональности

$$E\,\varphi_v\,du + F\,(\varphi_v\,dv - \varphi_u\,du) - G\,\varphi_u\,dv = 0$$

- или, равносильно,

$$(E\,\varphi_v - F\,\varphi_u)\,du + (F\,\varphi_v - G\,\varphi_u)\,dv = 0.$$

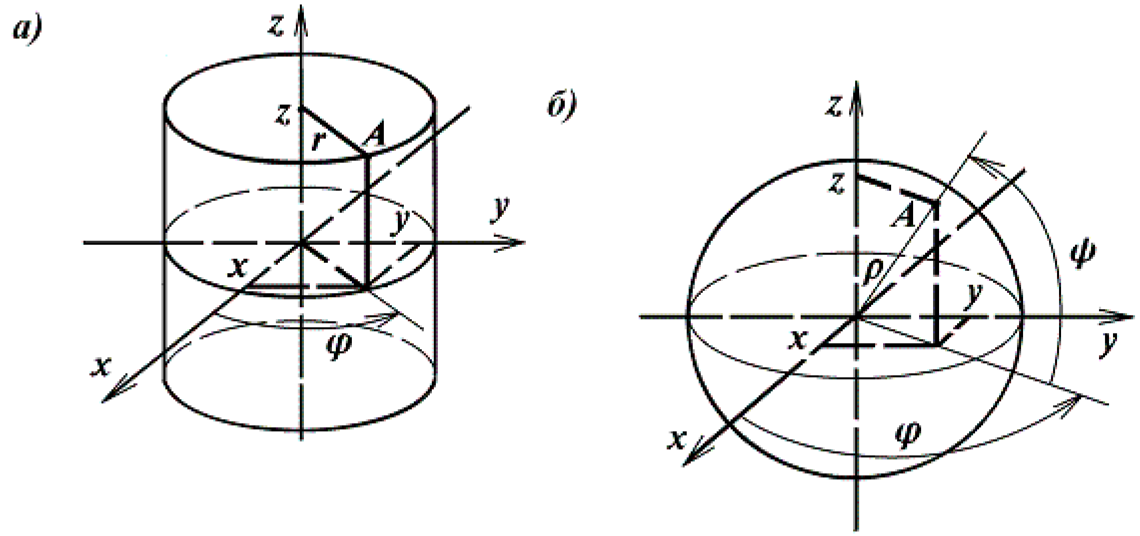
- Полученное уравнение является дифференциальным уравнением семейства кривых, ортогональных семейству, заданному уравнениями $\varphi(u,v)=C,$ $C=const$.
- Площадь части поверхности, задаваемой параметрическим уравнением $\vec{r}=\vec{r}(u,v)$, определенным на компактной области D плоскости переменных u,v, с кусочно гладкой границей ∂D, вычисляют по формуле:

$$S = \iint\limits_D |\vec{r}_u \times \vec{r}_v|\,du dv = \iint\limits_D \sqrt{EG-F^2}\,du dv.$$

- Гомеоморфизм $f:\Phi\to\Psi$ поверхностей называется *изометрией*, если поверхности Φ и Ψ можно параметризовать так, что первая квадратичная форма поверхности

Φ в любой точке P равна первой квадратичной форме поверхности Ψ в точке $f(P)$.

- Очевидно, соответственные кривые изометричных поверхностях имеют равные длины. Обратное также верно. Кроме этого, на изометричных поверхностях углы между соответственными кривыми равны, и площади соответственных областей также равны.
- Также имеется важный класс гомеоморфизмов поверхностей, включающий в себя изометрии. Гомеоморфизм $f:\Phi\to\Psi$ поверхностей называется *конформным отображением*, если для любых пересекающихся кривых γ_1 и γ_2 на поверхности Φ образуемый ими угол равен углу между кривыми $f(\gamma_1)$ и $f(\gamma_2)$ на поверхности Ψ. Очевидно, всякая изометрия является конформным отображением.
- **Задачи**
- 1. *Цилиндрическая система координат в пространстве* задается так, как показано на рис. 24 а).



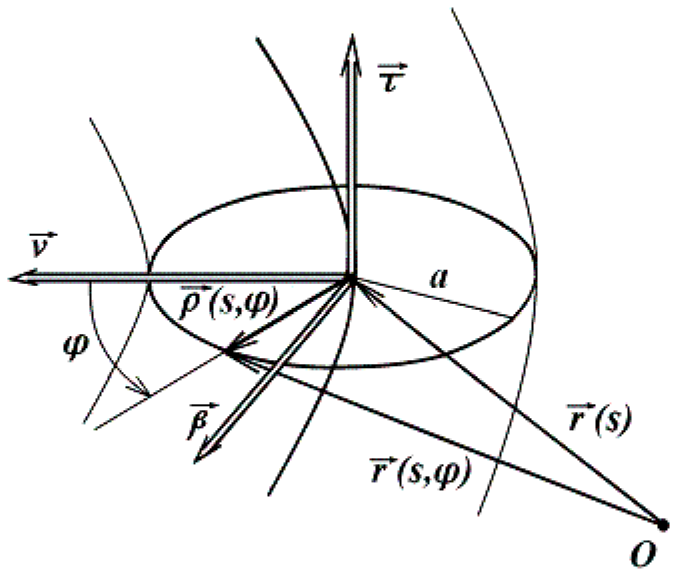
- Рис. 24. а) Цилиндрическая система координат б) Сферическая система координат
- Напишите выражение декартовых координат точки (x,y,z) через ее цилиндрические координаты (r,φ,z) и правила обратного перехода. Составьте параметрическое представление прямого кругового цилиндра радиуса r, ось которого совпадает с осью аппликат. Изобразите на рисунке вид координатных линий построенного параметрического представления. Исследуйте это представление на регулярность.
- 2. *Сферическая система координат в пространстве* задается так, как показано на рис. 24 б). Напишите выражение декартовых координат точки (x,y,z) через ее сферические координаты (ρ,φ,ψ) и правила обратного перехода. Составьте параметрическое представление сферы радиуса ρ, центр которой совмещен с началом координат. Изобразите на рисунке вид координатных линий построенного параметрического представления. Исследуйте это представление на регулярность. Во всех ли точках сферы координатная сеть правильна?
- 3. Дано параметрическое представление поверхности. Определите и изобразите на рисунке вид поверхности и координатные линии. Укажите область изменения параметров. Правильная ли на этой поверхности координатная сеть?

1) $\vec{r}(u,v)=(a\cos u\cos v;\ b\sin u\cos v;\ c\sin v)$;
2) $\vec{r}(u,v)=(a\,\mathrm{ch}\,u\cos v;\ a\,\mathrm{ch}\,u\sin v;\ c\,\mathrm{sh}\,u)$;
3) $\vec{r}(u,v)=(a\,\mathrm{sh}\,u\cos v;\ a\,\mathrm{sh}\,u\sin v;\ c\,\mathrm{ch}\,u)$;
4) $\vec{r}(u,v)=(\frac{1}{c}\sqrt{u^2+c^2}\cos v;\ \frac{1}{c}\sqrt{u^2+c^2}\sin v;\ u)$;
5) $\vec{r}(u,v)=(au\cos v;\ bu\sin v;\ \frac{u^2}{2p})$;
6) $\vec{r}(u,v)=(au\,\mathrm{ch}\,v;\ bu\,\mathrm{sh}\,v;\ \frac{u^2}{2p})$;
7) $\vec{r}(u,v)=(a\cos v;\ a\sin v;\ u)$;
8) $\vec{r}(u,v)=(au\cos v;\ bu\sin v;\ cu)$;
9) $\vec{r}(u,v)=((a+b\cos v)\cos u;\ (a+b\cos v)\sin u;\ b\sin v)$;
10) $\vec{r}(u,v)=(\sqrt{u^2+a^2}\cos v;\ \sqrt{u^2+a^2}\sin v;\ a(\ln\mathrm{tg}\,\frac{u}{2}+\cos u)),\ u\neq\pi/2.$

- 4. *Поверхность вращения.* Кривая $\gamma: x=f(u), z=g(u),$ расположенная в плоскости xOz, вращается вокруг оси Oz. Составьте уравнение поверхности, образуемой этой кривой. Докажите, что нормаль поверхности вращения расположена в плоскости, проходящей через ось вращения.
- Кривую γ назовем *образующей* поверхности вращения.
- 5. Составьте параметрическое задание поверхности вращения с осью Oz и образующей γ:
  1) $x=a\,\mathrm{ch}\,u,\ z=u$;
  2) $x=u,\ z=a\,\mathrm{ch}\,u$;
  3) $x=a\,\mathrm{ch}\,u,\ z=b\,\mathrm{sh}\,u$.
- 6. *Поверхность переноса.* Две кривые $\gamma_1:\vec{r}=\vec{f}(u)$ и $\gamma_2:\vec{r}=\vec{g}(v)$ пересекаются в точке P, такой, что $\vec{OP}=\vec{f}(u_0)=\vec{g}(v_0)$, *трансверсально*, то есть $\vec{f}\,'(u_0)\nparallel\vec{g}\,'(v_0)$. Кривая γ_1 перемещается поступательно так, что ее точка u_0 скользит по кривой γ_2. Заметаемая ею поверхность называется поверхностью переноса.
  1) Составьте параметрическое представление этой поверхности. Изменится ли вид поверхности переноса, если кривые γ_1 и γ_2 поменять ролями?
  2) Докажите, что касательные плоскости поверхности переноса вдоль координатной линии $u=const$ параллельны некоторой прямой.
  3) Докажите, что параболоиды являются поверхностями переноса.

Указание. В качестве кривых γ_1 и γ_2 выберите параболы, расположенные во взаимно ортогональных плоскостях.

- 7. *Обобщенная цилиндрическая поверхность.* В условии предыдущей задачи считайте линию γ_1 прямой, параллельной вектору $\vec{a}$. Получаемая таким способом поверхность переноса называется обобщенной цилиндрической поверхностью. Постройте ее параметрическое представление и уравнение семейства касательных плоскостей к цилиндрической поверхности в тех ее точках, в которых $\vec{g}'(v) \times \vec{a} \neq \vec{0}$. Что можно сказать о касательных плоскостях цилиндрической поверхности?
- 8. *Обобщенная коническая поверхность* образована всеми прямыми, пересекающими данную кривую $\gamma : \vec{r} = \vec{f}(u)$ и проходящими через точку S, $S \notin \gamma.$ При этом кривая γ называется *направляющей*, а прямые - *образующими* конической поверхности. Составьте параметрическое представление конической поверхности и уравнение семейства касательных плоскостей к конической поверхности в тех ее точках, в которых $\vec{r}_u \times (\vec{r} - \vec{OS}) \neq \vec{0}$. Что можно сказать о касательных плоскостях конической поверхности?
- 9. *Винтовая поверхность.* Прямая $x = u, \ \ z = 0$ вращается вокруг оси Oz и одновременно перемещается вдоль нее так, что перемещение пропорционально углу поворота. Описываемая этой прямой поверхность называется винтовой поверхностью. Напишите параметрическое представление винтовой поверхности и дайте ее изображение.
- 10. *Обобщенная винтовая поверхность.* В условии предыдущей задачи замените прямую линией $z = f(u)$, $x = g(u)$. Напишите параметрическое представление описываемой поверхности. Полагая 1) $x = u, \ \ z = e^{-u}, \ \ u \geq 0$; 2) $x = a + b\cos u, \ \ y = b\sin u$, напишите параметрические представления и дайте изображения полученных поверхностей.
- 11. *Трубчатая поверхность* образована всеми окружностями постоянного радиуса a с центрами на кривой $\gamma : \vec{r} = \vec{r}(s),$ расположенными в нормальных плоскостях этой кривой. Считая, что s- естественный параметр кривой, кривизна k кривой отлична от нуля и $ak < 1$, составьте параметрическое представление трубчатой поверхности.



- Рис. 25. Трубчатая поверхность

- *Решение.* (рис. 25) Представим радиус - вектор точки поверхности в виде суммы $\vec{r}(s,\varphi) = \vec{r}(s) + \vec{\rho}(s,\varphi)$, где φ - полярный угол в нормальной плоскости кривой γ, отсчитываемый от главной нормали по направлению к бинормали, $\vec{\rho}(s,\varphi)$ - соответствующий "полярный радиус". Тогда $\vec{\rho}(s,\varphi) = a\vec{\nu}(s)\cos\varphi + a\vec{\beta}(s)\sin\varphi$, где $\vec{\nu}(s)$ и $\vec{\beta}(s)$ - единичные векторы главной нормали и бинормали в точке, соответствующей значению s естественного параметра. Заметим, что в естественной параметризации $\vec{r}'(s) = \vec{\tau}(s)$, $\vec{r}''(s) = k\vec{\nu}(s)$ и $\vec{r}'(s) \times \vec{r}''(s) = k\vec{\beta}(s)$. Эти уравнения позволяют выразить единичные направляющие векторы трехгранника Френе через производные вектора $\vec{r}(s)$:

$$\vec{\nu}(s) = \frac{1}{k}\vec{r}''(s), \quad \vec{\beta}(s) = \frac{1}{k}\vec{r}'(s) \times \vec{r}''(s).$$

- Подстановка в выражение для радиус - вектора $\vec{r}(s,\varphi)$ приводит к окончательному выражению

$$\vec{r}(s,\varphi) = \vec{r}(s) + a\vec{\nu}(s)\cos\varphi + a\vec{\beta}(s)\sin\varphi$$

$$= \vec{r}(s) + a\frac{1}{k}\vec{r}''(s)\cos\varphi + a\frac{1}{k}\vec{r}'(s) \times \vec{r}''(s)\sin\varphi.$$

- Докажите, что нормаль трубчатой поверхности пересекает кривую γ и является ее нормалью.
  Указание. Воспользуйтесь формулами Френе.

- Составьте параметрическое представление трубчатой поверхности, если $\gamma : x^2 + y^2 = R^2$, $R > 1$, а радиус образующей окружности $a = 1$.
- 12. Докажите, что сумма квадратов отрезков, отсекаемых на осях координат касательной плоскостью поверхности $x = u^3 \sin^3 v,\ y = u^3 \cos^3 v, z = (a^2 - u^2)^{3/2}$, не зависит от выбора точки на поверхности.
- 13. Докажите, что касательные плоскости к поверхности $xyz = a^3$ образуют с координатными плоскостями тетраэдры постоянного объема.
- 14. Докажите, что касательные плоскости к поверхности $x^5 + y^5 - z = 0$ в точках $(a, -a, 0)$ образуют пучок плоскостей.
- 15. Дана кривая $\gamma : \vec{r} = \vec{f}(u)$, где u- естественный параметр. Найдите первую квадратичную форму поверхности, образованной

  1) касательными к кривой γ;
  2) главными нормалями;
  3) бинормалями кривой γ.
- 16. На поверхности, образованной касательными к кривой $\gamma : \vec{r} = \vec{f}(u)$, где u- естественный параметр,
  1) составьте дифференциальное уравнение ортогональных траекторий к семейству прямолинейных образующих;
  2) напишите дифференциальное уравнение линий, пересекающих прямолинейные образующие под постоянным углом α;
  3) убедитесь в том, что область этой поверхности наложима на плоскость.
- 17. Дан прямой геликоид $\vec{r}(u, v) = (u\cos v; u\sin v; av)$.
  1) Вычислите его первую квадратичную форму.
  2) Найдите угол между координатными линиями как функцию точки.
  3) Составьте уравнение биссекторных линий для линий координатной сети.
  4) Проверьте, что сеть, дифференциальное уравнение которой имеет вид $du^2 - (u^2 + a^2)dv^2 = 0$, ортогональна.
  5) Вычислите площадь четырехугольника, ограниченного линиями $u = 0$, $u = a$, $v = 0$, $v = 1$.
  6) Покажите, что прямой геликоид наложим на катеноид с образующей $x = \sqrt{u^2 + a^2}$, $y = 0$, $z = a\ln\left(\dfrac{u + \sqrt{u^2 + a^2}}{a}\right)$.
- 18. Дан прямой круговой цилиндр $\vec{r}(u, v) = (a\cos v; a\sin v; u)$.
  1) Вычислите его первую квадратичную форму.
  2) Найдите угол между координатными линиями как функцию точки.
  3) Составьте уравнения линий, пересекающих образующие под постоянным углом.
  4) Найдите уравнение ортогональных траекторий семейства линий $u^2 + v = const$.

5) Вычислите площадь треугольника, ограниченного линиями $u = \pm av,$ $v = 1$.
6) Докажите, что прямой круговой цилиндр наложим на плоскость.

- 19. Представление псевдосферы имеет вид

$$\vec{r}(u,v) = (a \sin u \cos v; a \sin u \sin v; a(\ln \operatorname{tg} \frac{u}{2} + \cos u)), \quad u \neq \pi/2.$$

- 1) Вычислите ее первую квадратичную форму.
2) Найдите на псевдосфере линии, пересекающие меридианы под постоянным углом (локсодромы).
3) Найдите площадь поверхности псевдосферы.
4) Вычислите длину дуги линии $v = \ln \operatorname{tg} \frac{u}{2}$ между точками $(u_1, v_1),$ $(u_2, v_2).$
- 20. Дана сфера $\vec{r}(u,v) = (a \cos u \cos v, a \sin u \cos v, a \sin v).$
а) Найдите ее первую квадратичную форму.
б) Напишите уравнения ортогональных траекторий семейства линий $u - v = const$.
в) Составьте уравнение локсодромы - линии на сфере, которая пересекает меридианы под постоянным углом α.

§4. Задачи о кривизне на поверхности. Внутренняя геометрия поверхности

- **Вопросы теории**
- Вторая квадратичная форма поверхности. Кривизна регулярной кривой на поверхности. Теорема Менье. Нормальная кривизна поверхности в данном направлении. Соприкасающийся параболоид и типы точек на поверхности. Главные кривизны и главные направления поверхности в точке. Полная (гауссова) и средняя кривизны поверхности. Поверхности положительной, нулевой и отрицательной гауссовой кривизны. Поверхности постоянной (положительной и отрицательной) гауссовой кривизны. Деривационные формулы и символы Кристоффеля для поверхности. Основные уравнения теории поверхностей. Теорема Бонне. Геодезическая кривизна кривой на поверхности. Геодезические линии на поверхности. Свойства геодезических. Примеры геодезических линий на поверхностях. Существование и единственность геодезической, проходящей через данную точку поверхности в данном направлении. Реализации геодезических в задачах физики. Понятие внутренней геометрии поверхности. Геодезические линии и гауссова кривизна как объекты внутренней геометрии. Теорема Гаусса - Бонне. Дефект геодезического треугольника и топологическая инвариантность интегральной кривизны.
- **Основные определения, результаты, комментарии**
- *Второй квадратичной формой* поверхности называется выражение

$$II = -(d\vec{r}, d\vec{n}) = (d^2\vec{r}, \vec{n}) = L\,du^2 + 2M\,du dv + N\,dv^2,$$

- где $\vec{n}$- единичный вектор нормали поверхности в ее точке, а коэффициенты L, M, N имеют выражение

$$L = (\vec{r}_{uu}, \vec{n}), \quad M = (\vec{r}_{uv}, \vec{n}), \quad N = (\vec{r}_{vv}, \vec{n}).$$

- На поверхности Φ рассмотрим C^2- регулярную кривую γ (рис. 26), задаваемую внутренними уравнениями $u=u(s)$, $v=v(s)$, где s- естественный параметр кривой. Известно, что вторая производная радиус-вектора точки кривой равна $\vec{r}''(s)=k\vec{\nu}$; тогда

$$(\vec{r}''(s),\vec{n})=k(\vec{\nu},\vec{n})=k\cos\phi.(7)$$

- Здесь ϕ- угол между векторами $\vec{\nu}$ и $\vec{n}$. С другой стороны, имеем

$$\vec{r}''(s)=\vec{r}_{uu}u'^{\,2}(s)+2\vec{r}_{uv}u'(s)v'(s)+\vec{r}_{vv}v'^{\,2}(s)+\vec{r}_uu''(s)+\vec{r}_vv''(s).$$

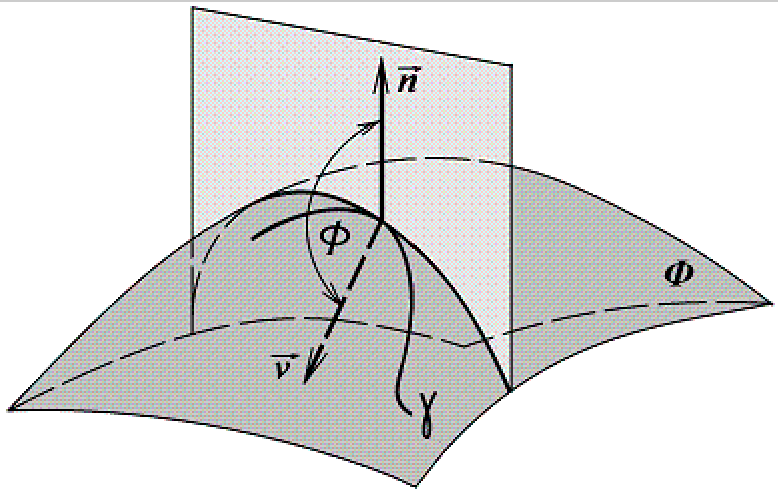


Рис. 26. К теореме Менье

- Подстановка в (7) с учетом того, что $ds^2=(d\vec{r}(s))^2=I$, приводит к равенству

$$k\cos\phi=\frac{II}{I}=\frac{Ldu^2+2Mdudv+Ndv^2}{Edu^2+2Fdudv+Gdv^2}.(8)$$

- Правая часть уравнения (8) зависит только от *направления* $(du:dv)$ кривой в данной точке и называется *нормальной кривизной поверхности в данной точке в данном направлении* и обозначается k_n. Равенство (8) принимает форму $k_n=k\cos\phi$, которая носит название *теоремы Менье*. Для нормального сечения поверхности в данном направлении $\vec{\nu}=\pm\vec{n}$, и потому $k_n=\pm k$, где k- кривизна нормального сечения.
- Далее будет введено "квадратичное приближение" формы поверхности в окрестности точки - так называемый соприкасающийся параболоид. В каждом конкретном случае он может оказаться гиперболическим или эллиптическим параболоидом, а также не исключено его вырождение в параболический цилиндр или плоскость.
- Пусть Φ- дважды непрерывно дифференцируемая поверхность, P,Q- различные точки на поверхности Φ (рис. 27), и U- параболоид, касающийся поверхности Φ в точке P.

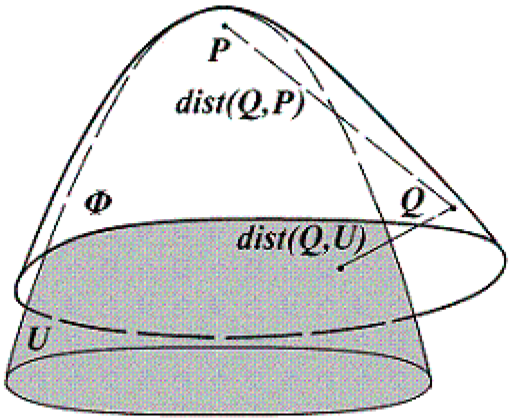


Рис. 27. Соприкасающийся параболоид поверхности

- Параболоид U называется *соприкасающимся параболоидом* поверхности в ее точке P, если выполнено соотношение

$$\lim_{Q\to P}\frac{dist(Q,U)}{dist(Q,P)^2}=0.$$

- Предположим, поверхность представляет собой график функции $z=f(x,y)$, проходящий через начало координат так, что нормаль поверхности в точке $(0,0,0)$ совпадает с осью аппликат. Согласно теореме о неявной функции, этого всегда можно добиться выбором подходящей системы координат для C^2-регулярной поверхности. Разлагая по формуле Тейлора функцию $z=f(x,y)$, имеем

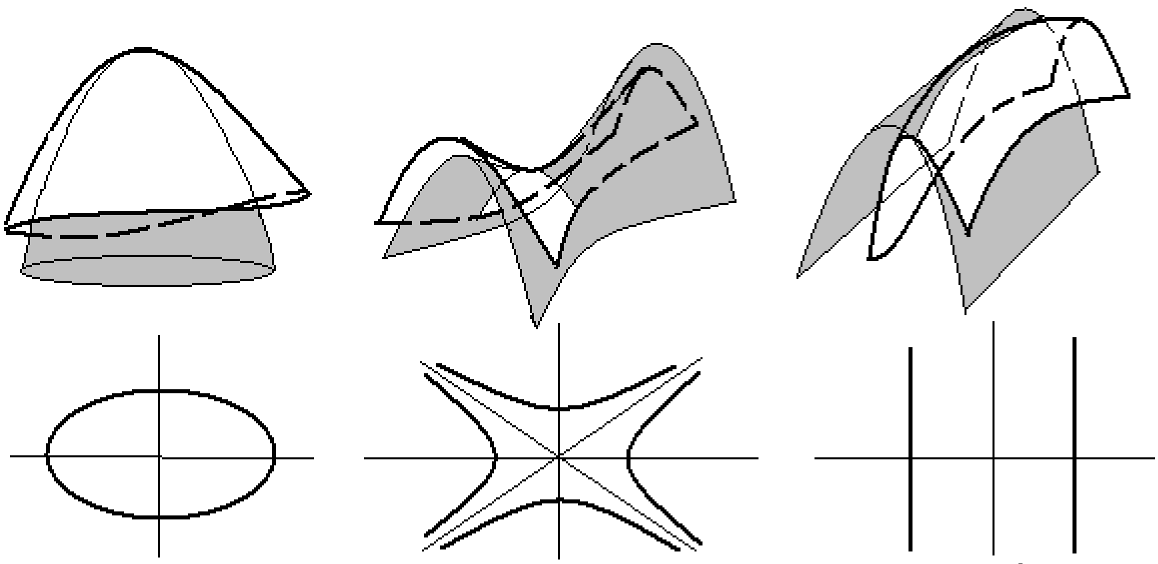
$$z=\frac{1}{2}(ax^2+2bxy+cy^2)+\xi(x,y)(x^2+y^2),$$

- где $\lim_{x^2+y^2\to 0}\xi(x,y)=0$. Тогда нетрудно проверить, что уравнение $z=\frac{1}{2}(ax^2+2bxy+cy^2)$ является уравнением соприкасающегося параболоида данной поверхности в точке $(0,0,0)$.
- Первые и вторые производные координат в фиксированной точке одинаковы у поверхности и ее соприкасающегося параболоида в этой точке. Поэтому соприкасающийся параболоид имеет те же геометрические характеристики, что и исходная поверхность в данной точке, если эти характеристики выражаются через коэффициенты первой и второй квадратичных форм. Поворотом осей координат можно привести уравнение соприкасающегося параболоида к виду

$$z=\frac{1}{2}(k_1x^2+k_2y^2).$$

- Направления координатных осей Ox и Oy, при которых уравнение соприкасающегося параболоида имеет такой вид, называются *главными направлениями*. Нормальные кривизны, вычисленные в главных направлениях, называются *главными нормальными кривизнами* поверхности в данной точке. Вычисляя по теореме Менье нормальную кривизну соприкасающегося параболоида как функцию направления, имеем

- $$k_n = \frac{k_1\,dx^2 + k_2\,dy^2}{dx^2 + dy^2}.(9)$$
- Таким образом, нормальная кривизна в направлении оси Ox равна k_1, нормальная кривизна в направлении оси Oy равна k_2. Обозначив за ψ угол, образованный направлением $(dx : dy)$ с осью Ox, из (9) получим *теорему Эйлера*:
- $$k_n = k_1 \cos^2\psi + k_2 \sin^2\psi.$$
- Используя теорему Эйлера, нетрудно доказать, что главными являются те направления, в которых нормальная кривизна достигает экстремумов.
- Линия на поверхности, направление которой в каждой точке является главным, называется *линией кривизны*. Условие экстремума нормальной кривизны в направлении $(du : dv)$ может быть приведено к виду (обратите внимание на порядок следования дифференциалов!)
- $$\begin{vmatrix} dv^2 & -du\,dv & du^2 \\ E & F & G \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0.(10)$$
- Если определитель равен нулю тождественно, то в данной точке все направления главные. Это означает, что нормальная кривизна поверхности в данной точке постоянна и не зависит от направления. Если нормальная кривизна в такой точке отлична от нуля, то точка называется *шаровой,* или *омбилической.* Соприкасающийся параболоид в такой точке является параболоидом вращения. Если нормальная кривизна в данной точке во всех направлениях равна нулю, то точка называется *точкой уплощения*, а соприкасающийся параболоид вырождается в плоскость.
- Во всех остальных случаях уравнение (10) имеет два корня- главных направления, которые дают дифференциальные уравнения линий кривизны. Можно доказать, что в окрестности любой точки, не являющейся омбилической точкой или точкой уплощения, поверхность может быть параметризована так, что координатные линии ее параметризации будут линиями кривизны.
- Величины $H = (k_1 + k_2)/2$ и $K = k_1 k_2$ называются соответственно *средней* и *гауссовой* (*полной*) *кривизнами* поверхности в точке. В случае произвольной параметризации средняя и полная кривизны могут быть вычислены с использованием коэффициентов первой и второй квадратичных форм:
- $$H = \frac{1}{2}\frac{EN - 2MF + LG}{EG - F^2}, \quad K = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$
- Заметим, что в силу положительной определенности первой квадратичной формы, знак полной кривизны определяется знаком выражения $LN - M^2$.
- *Индикатриса кривизны,* или *индикатриса Дюпена*, строится в касательной плоскости в данной точке поверхности по следующему правилу. Координатные оси в касательной плоскости совмещают с главными направлениями. На луче, расположенном в каждом направлении, откладывают отрезок, равный величине, обратной квадратному корню из нормальной кривизны поверхности в этом направлении, то есть $1/\sqrt{k_n}$.



- Рис. 28. Классификация точек поверхности

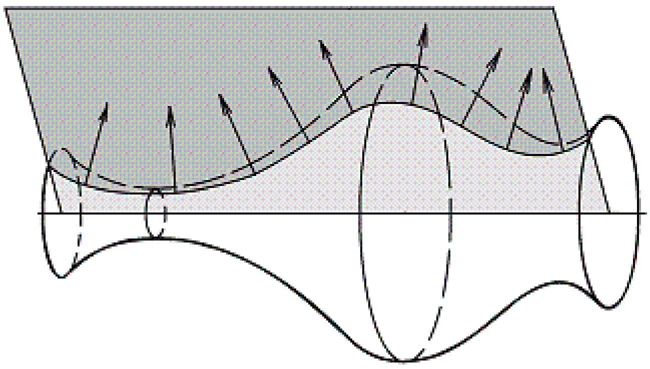
- Кроме специального случая точки уплощения, различают типы точек на поверхностях, показанные на рис. 28. Существуют поверхности, состоящие из точек одного, двух или трех типов.
- Направление $(du : dv)$ на регулярной поверхности называется *асимптотическим*, если нормальная кривизна кривой этого направления равна нулю. Линия на поверхности называется *асимптотической*, если в каждой точке ее касательная имеет асимптотическое направление.
- Из теоремы Менье и уравнения (8) следует, что дифференциальное уравнение асимптотических линий имеет вид

$$Ldu^2 + 2M\,dudv + N dv^2 = 0.$$

- В зависимости от знака дискриминанта $LN - M^2$, это квадратное уравнение может иметь один или два корня - асимптотических направления, или не иметь корней. Наличие корня поставляет обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка, указание точки поверхности задает начальные условия для его решения. Теорема существования и единственности решения задачи Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка, доказываемая в курсах математического анализа, приводит к следующему геометрическому результату. На поверхности, состоящей из эллиптических точек, действительных асимптотических линий нет; на
поверхности, состоящей из гиперболических точек, имеется асимптотическая сеть; на поверхности, состоящей из параболических точек, не являющихся точками уплощения, через каждую точку проходит единственная асимптотическая линия.
- Рассмотрим на C^2-регулярной поверхности Φ кривую γ класса C^2. Пусть $\vec{\tau}$- единичный вектор касательной к этой кривой в точке P, $\vec{n}$- единичный вектор нормали поверхности Φ в точке P, $k\vec{\nu}$- вектор кривизны кривой γ в точке P, s- естественный параметр кривой. Вводя вектор $\vec{n}_g = \vec{n} \times \vec{\tau}$, получим правый

ортонормированный базис $\vec{\tau}, \vec{n}_g, \vec{n}$. Разлагая в этом базисе вектор кривизны $k\vec{\nu}$, имеем $k\vec{\nu} = \alpha\vec{n}_g + \beta\vec{n}$, где $\beta = (k\vec{\nu}, \vec{n}) = k_n.$ Таким образом, нормальная кривизна поверхности Φ в направлении кривой γ есть проекция вектора кривизны этой кривой на направление вектора нормали поверхности. Коэффициент $\alpha = (k\vec{\nu}, \vec{n}_g) = (k\vec{\nu}, \vec{n}, \vec{\tau})$ называется *геодезической кривизной* k_g кривой γ в точке $P.$ Геодезическая кривизна кривой на поверхности может быть вычислена в естественной параметризации по формуле $k_g = (\vec{r}\,'(s), \vec{r}\,''(s), \vec{n}).$

- *Геодезической линией*, или просто *геодезической*, называется линия, геодезическая кривизна которой в каждой ее точке равна нулю.
- Иными словами, геодезическая - это кривая, направление которой в каждой ее точке совпадает с направлением нормального сечения поверхности.
- Например, известно, что нормаль поверхности вращения принадлежит плоскости, содержащей ось вращения. Поэтому нормальные сечения поверхности вращения плоскостями, проходящими через ее ось, являются геодезическими (рис. 29).



-
    - Рис. 29. Осевое сечение поверхности вращения
- Можно доказать, что через каждую точку C^2-регулярной поверхности можно провести геодезическую линию, и притом единственную. Замечательным свойством геодезической является также то, что если точки P и Q геодезической линии достаточно близки, то дуга этой линии является кратчайшей среди всех дуг кривых на данной поверхности, соединяющих точки P и Q.
- Аналогом формул Френе кривой являются *деривационные формулы* поверхности:

$$\begin{aligned}
\vec{r}_{uu} &= \Gamma^1_{11}\,\vec{r}_u + \Gamma^2_{11}\,\vec{r}_v + \alpha\,\vec{n},\\
\vec{r}_{uv} &= \Gamma^1_{12}\,\vec{r}_u + \Gamma^2_{12}\,\vec{r}_v + \beta\,\vec{n},\\
\vec{r}_{vv} &= \Gamma^1_{22}\,\vec{r}_u + \Gamma^2_{22}\,\vec{r}_v + \gamma\,\vec{n},\\
\vec{n}_u &= \alpha_1\,\vec{r}_u + \beta_1\,\vec{r}_v + \gamma_1\,\vec{n},\\
\vec{n}_v &= \alpha_2\,\vec{r}_u + \beta_2\,\vec{r}_v + \gamma_2\,\vec{n}.
\end{aligned}$$

- Так как $\vec{n}$- единичный вектор, то $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.$ Из двух последних уравнений нетрудно получить, что
  - $$\alpha_1 = \frac{MF - LG}{EG - F^2},\ \ \beta_1 = \frac{LF - ME}{EG - F^2},\ \ \alpha_2 = \frac{NF - MG}{EG - F^2},\ \ \beta_2 = \frac{MF - NE}{EG - F^2};$$
- из уравнений для вторых производных следует, что $\alpha = L,$ $\beta = M,$ $\gamma = N.$

  Коэффициенты Γ_{ij}^k называются *символами Кристоффеля* поверхности. Несложным, но весьма громоздким вычислением можно показать, что *символы Кристоффеля выражаются только через коэффициенты первой квадратичной формы и их первые частные производные*.
- Если поверхность и ее параметризация являются C^3-регулярными, то имеют место следующие уравнения связи между коэффициентами первой и второй квадратичных форм поверхности, называемые *основными уравнениями теории поверхностей.* Это *уравнения Петерсона - Кодацци*:
- $$2(EG - F^2)(L_v - M_u) - (EN + GL - 2MF)(E_v - F_u) + \begin{vmatrix} E & F & G \\ E_u & F_u & G_u \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0,$$
- $$2(EG - F^2)(M_v - N_u) - (EN + GL - 2MF)(F_v - G_u) + \begin{vmatrix} E & F & G \\ E_v & F_v & G_v \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0$$
- и *уравнение Гаусса*:
  - $$LN - M^2 = \frac{1}{4(EG - F^2)} \begin{vmatrix} E & F & G \\ E_u & F_u & G_u \\ E_v & F_v & G_v \end{vmatrix} +$$
- $$+\frac{1}{2}\sqrt{EG - F^2}\ \left[\left(\frac{E_v - F_u}{\sqrt{EG - F^2}}\right)_v - \left(\frac{F_v - G_u}{\sqrt{EG - F^2}}\right)_u\right].$$
- Из уравнения Гаусса следует, что полная кривизна поверхности выражается через коэффициенты первой квадратичной формы.
- Оказывается, других связей между первой и второй квадратичными формами нет, как утверждает *теорема Бонне*: если в открытой области D на плоскости переменных u, v заданы две квадратичные формы, из которых первая положительно определена и ее коэффициенты принадлежат классу C^2, а коэффициенты второй формы принадлежат классу C^1, и притом коэффициенты заданных форм удовлетворяют уравнениям Петерсона - Кодацци и Гаусса, то каждая точка $(u, v) \in D$ обладает окрестностью $\Omega \subset D$, такой, что определено вложение $\vec{r} : \Omega \to \mathbb{R}^3$, задающее поверхность класса C^3, для которой данные квадратичные формы являются соответственно первой и второй квадратичным формами. Эта поверхность единственна с точностью до перемещения.
- К *внутренней геометрии поверхности* относят те геометрические характеристики поверхности, понятия и результаты, которые определяются первой квадратичной формой. Объектами внутренней геометрии являются длины кривых, площади областей, углы между кривыми на поверхности, а также геодезическая кривизна

кривой на поверхности, символы Кристоффеля и полная кривизна поверхности. Объекты внутренней геометрии остаются неизменными при изометриях.

- Пусть γ -- C^2-регулярная замкнутая кривая на поверхности Φ, ограничивающая область Q, гомеоморфную кругу. Тогда справедливо соотношение
  - $$\oint_{\gamma} k_g ds = 2\pi - \iint_{Q} K\, d\sigma,$$
- где ds- элемент длины дуги кривой γ, $d\sigma$- элемент площади области Q. Это соотношение составляет содержание *теоремы Гаусса - Бонне*. Интеграл в правой части уравнения называют *интегральной кривизной области* Q. Для кусочно-регулярной кривой, образующей на поверхности криволинейный m-угольник со сторонами $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$, углы которого равны $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$, теорема Гаусса - Бонне имеет вид:
  - $$\sum_{i=1}^{m} \int_{\gamma_i} k_g ds + \sum_{i=1}^{m} (\pi - \alpha_i) = 2\pi - \int_{Q}\int K\, d\sigma.$$
- В частности, для геодезического треугольника имеем
  - $$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 - \pi = \int_{Q}\int K\, d\sigma,$$
- то есть сумма углов геодезического треугольника больше π, если $K > 0$, и меньше π, если $K < 0$.
- Пусть Φ- замкнутая ориентируемая поверхность. Триангулируем ее на геодезические треугольники $T_1,\ldots,T_f$. Тогда для каждого из этих треугольников имеем
  - $$\alpha_{i1} + \alpha_{i2} + \alpha_{i3} - \pi = \int_{T_i}\int K d\sigma.$$
- Суммируя по всем треугольникам триангуляции, получим
  - $$\sum_{i=1}^{f} (\alpha_{i1} + \alpha_{i2} + \alpha_{i3}) - \pi f = \iint_{\Phi} K\, d\sigma,$$
- где f- число треугольников триангуляции. Сумма углов триангуляции в левой части уравнения равна $2\pi v$, где v- число вершин триангуляции. Заметим, что каждая из сторон является общей для двух примыкающих треугольников, поэтому, если e- число ребер триангуляции, то $2e = 3f$. Тогда $2\pi v - \pi f = \pi(2v - f) = 2\pi(v - e + f) = 2\pi\chi(\Phi)$. Отсюда следует уравнение, связывающее эйлерову характеристику поверхности и ее интегральную кривизну:

$2\pi\chi(\Phi) = \iint\limits_{\Phi} K d\sigma.$ Таким образом, *интегральная кривизна замкнутой ориентируемой поверхности - топологический инвариант.*

- **Задачи**
- 1. Для каждой из данных поверхностей вычислите вторую квадратичную форму, найдите гауссову и среднюю кривизны, а также главные направления и главные кривизны этой поверхности в начале координат:
  а) $2z = a^2x^2 - b^2y^2$; в) $z = ax + by$;
  б) $2z = a^2x^2 + b^2y^2$; г) $2z = ax^2$.
- 2. Найдите главные кривизны поверхности:
  а) $z = xy$ в точке (1,1,1);
  б) $z = x^2/a + y^2/b$ в точке (0,0,0).
- 3. Вычислите вторую квадратичную форму:
  а) сферы $x = a\cos u \cos v, \;\; y = a\cos u \sin v, \;\; z = a\sin u;$
  б) поверхности вращения $x = f(u)\cos v, \;\; y = f(u)\sin v, \;\; z = g(u);$
  в) кругового цилиндра $x = a\cos v, \;\; y = a\sin v, \;\; z = u$;
  г) винтовой поверхности $x = u\cos v, \;\; y = u\sin v, \;\; z = au$. Проведите классификацию точек указанных поверхностей. Напишите дифференциальные уравнения асимптотических линий. Там, где это возможно, укажите явный вид асимптотических линий либо докажите, что их нет.
- 4. Дан эллипсоид $\vec{r}(u,v) = (a\cos u \cos v, a\cos u \sin v, c\sin u)$. Найдите его вторую квадратичную форму, главные кривизны в точках, расположенных на экваторе. Исследуйте характер точек данной поверхности и проверьте, что координатная сеть является сетью линий кривизны.
- 5. Для данных поверхностей вычислите вторую квадратичную форму, найдите среднюю кривизну и исследуйте характер точек:
  а) круговой цилиндр $\vec{r}(u,v) = (a\cos v, a\sin v, u)$;
  б) прямой круговой конус $\vec{r}(u,v) = (u\cos v, u\sin v, cu)$. Укажите линии кривизны произвольных цилиндрической и конической поверхностей.
- 6. Дана поверхность, образованная касательными к кривой $\gamma : \vec{r} = \vec{f}(u)$, где u- естественный параметр. Вычислите вторую квадратичную форму поверхности, найдите гауссову и среднюю кривизны, а также главные направления и главные кривизны этой поверхности.
- 7. Дана поверхность переноса $\vec{r}(u,v) = \vec{a}(u) + \vec{b}(v).$ Найдите ее вторую квадратичную форму и вычислите полную кривизну.
- 8. Дана псевдосфера $x = a\sin v \cos u, \;\; y = a\sin v \sin u, \;\; z = a(\cos v + \ln \mathrm{tg}(v/2))$. Вычислите полную и среднюю кривизны псевдосферы. Проведите классификацию точек псевдосферы.

- 9. Дан тор $\vec{r}(u,v)=((a+b\cos v)\cos u;\ (a+b\cos v)\sin u;\ b\sin v)$.
  Вычислите его первую и вторую квадратичные формы, площадь и проведите классификацию его точек. Покажите на рисунке множества эллиптических, гиперболических и параболических точек тора.
- 10. Найдите главные кривизны и главные направления прямого геликоида $x=u\cos v,\ \ y=u\sin v,\ \ z=au;$ докажите, что главные направления делят пополам угол между винтовыми линиями и прямолинейными образующими. Найдите линии кривизны винтовой поверхности.
- 11. Дана линейчатая поверхность, образованная главными нормалями пространственной кривой $\gamma:\ \vec{r}=\vec{r}(u),$ где u- естественный параметр кривой γ. Найдите вторую квадратичную форму данной поверхности и вычислите ее полную и среднюю кривизны.
- 12. Найдите линии кривизны поверхности вращения.
- 13. Докажите, что радиус геодезической кривизны (величина, обратная геодезической кривизне) параллели поверхности вращения равен отрезку касательной к меридиану, заключенному между точкой касания и осью поверхности.
- 14. Найдите геодезическую кривизну окружности радиуса rна сфере радиуса R.
- 15. Докажите, что геодезические линии плоскости - прямые, геодезические линии сферы - окружности больших кругов. Можно ли доказать эти факты без использования формулы геодезической кривизны?

Библиографический список

1. Базылев В. Т., Дуничев К. И. Геометрия. Ч. II: учеб. пособие для физ.-мат. фак-тов пед. ин-тов. - М.: "Просвещение", 1975. - 367 с.

2. Борисович Ю. Г., Близняков Н. М., Израилевич Я. А., Фоменко Т. Н. Введение в топологию: учеб. пособие. - 2-е изд., доп. - М.: Наука. Физматлит, 1995. - 416 с.

3. Вернер А. Л., Кантор Б. Е., Франгулов С. А. Геометрия. Ч. II: учеб. пособие для физ.-мат. фак-тов пед. ин-тов. - СПб.: Спецлит, 1997. - 320 с.

4. Гильберт Д., Кон-Фоссен С. Наглядная геометрия. - 2-е изд. ГИТТЛ, 1951. - 352 с.

5. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы и приложения. - М.: Наука, 1986. - 760 с.

6. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. - 5-е изд. - М.: Наука, 1981. - 544 с.

7. Майоров В. М., Агафонова Т. Л., Сидоров Л. А. Задачи по объединенному курсу геометрии: учеб. пособие. - Ярославль: ЯГПИ им. К. Д. Ушинского, 1988. - 84 с.

8. Мищенко А. С., Соловьев Ю. П., Фоменко А. Т. Сборник задач по дифференциальной геометрии и топологии. - М.: Изд-во МГУ, 1981. - 184 с.

9. Мищенко А. С., Фоменко А. Т. Курс дифференциальной геометрии и топологии. - М.: Изд-во МГУ, 1980. - 440 с.

10. Погорелов А. В. Дифференциальная геометрия. - М.: Наука, 1974.

11. Позняк Э. Г., Шикин Е. Н. Дифференциальная геометрия: Первое знакомство. - М.: Изд-во МГУ, 1990. - 384 с.

12. Фоменко А. Т. Наглядная геометрия и топология: Математические образы в реальном мире. 2-е изд. - М.: Изд-во МГУ, Изд-во "ЧеРо", 1998. - 416 с.